Stochastik I

Maß– und Integrationstheorie 2009

9. Serie

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabel bzgl. des Lebesguemaßes. Beweisen Sie
$$\lim_{a\to\infty}\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty}\lim_{a\to\infty}\int_b^a f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\ .$$

2. Sei f eine messbare Abbildung vom Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nach $[0, \infty]$. Die Abbildung ν mit
$$\nu(A) := \int_A f(\omega)d\mu(\omega) \quad \text{für } \ A \in \mathcal{A}$$
ist dann korrekt definiert mit Werten in $[0, \infty]$.
   (a) Zeigen Sie, dass ν ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.
   (b) Wann ist ν ein endliches Maß, wann ein Wahrscheinlichkeitsmaß ?

3. Es sei μ ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, und sei
$$F(t) := \mu((-\infty, t])\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$
die erzeugte Verteilungsfunktion. Man definiert nun eine Funktion g auf dem Intervall $(0, F(\infty))$ (hierbei ist wie üblich $F(\infty) = \lim_{t\to\infty} F(t)$) durch
$$g(x) := \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq x\}\ .$$
   (a) Zeigen Sie, dass g eine wachsende und Borelmessbare Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$ ist.
   (b) Beweisen Sie $\mu = \lambda_1 \circ g^{-1}$.

4. Für eine nichtleere Menge Ω und einen messbaren Raum $(S, \mathcal{S})$ sei f eine Abbildung von Ω nach S. Wie früher bezeichne $\sigma(f)$ die kleinste σ–Algebra über Ω, für die f messbar ist. Beweisen Sie das folgende Faktorisierungslemma: Eine Funktion g von Ω nach $\mathbb{R}$ ist dann und nur dann $\sigma(f)$–messbar, wenn es eine $\mathcal{S}$–messbare Funktion $h : S \to \mathbb{R}$ mit $g = h \circ f$ gibt.
Hinweis: Man zeige die Aussage zuerst für nichtnegative Treppenfunktionen g. Danach approximiere man beliebige nichtnegative messbare Funktionen geeignet und schließlich zerlege man reellwertige g in g^+ und g^-.
Frage: Ist h eindeutig bestimmt ?

5. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $\{A_n\}$ eine Folge von Teilmengen aus $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass
   (a) die Folge $\{\mathbb{1}_{A_n}\}$ genau dann im Maß gegen Null konvergiert, wenn $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ gilt und
   (b) $\{\mathbb{1}_{A_n}\}$ konvergiert genau dann μ–f.ü. gegen Null, falls man $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = 0$ hat.

Abgabe: In der Übung am 15.06.09 oder am 16.06.09