Stochastik I

Maß– und Integrationstheorie 2009

8. Serie

1. Beweisen Sie folgenden Satz über die Differenzierbarkeit von Funktionen, die durch Integrale definiert sind:
   Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Weiterhin sei $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:
   (a) $\omega \to f(t, \omega)$ ist μ–integrierbar für jedes $t \in I$, also insbesondere messbar.
   (b) $t \to f(t, \omega)$ ist auf I für alle $\omega \in \Omega$ differenzierbar mit Ableitung $f'(t, \omega)$.
   (c) Zu $t \in I$ existieren ein $\varepsilon > 0$ und eine μ–integrable Funktion h mit $|f'(s, \omega)| \leq h(\omega)$ für $\omega \in \Omega$ und $s \in I$ mit $|t - s| < \varepsilon$.
   Dann ist die Funktion $F(t) := \int_\Omega f(t, \omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega)$ auf I differenzierbar, und es gilt
   $$F'(t) = \int_\Omega f'(t, \omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega)\ , \quad t \in I\ .$$
   Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung sowie den Konvergenzsatz von Lebesgue.

2. Benutzen Sie die Aussage von Aufgabe 1 zur Berechnung der Ableitung der Γ–Funktion mit $\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x$ auf $(0, \infty)$.

3. Unter Verwendung von Aufgabe 1 berechne man für die Funktion
   $$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{1 + \alpha_n t}\ , \quad t > 0\,,$$
   mit einer summierbaren Folge (α_n) positiver Zahlen die Ableitung $f'(t)$. Weiterhin bestimme man $\lim_{t\to\infty} f(t)$ und $\lim_{t\to\infty} f'(t)$. Begründen Sie die Ergebnisse.

4. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty]$ eine messbare Abbildung.
   (a) Zeigen Sie, dass
   $$\int_\Omega f\ \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq n\})$$
   gilt, vorausgesetzt f nimmt nur Werte in $\{0, 1, \ldots, \infty\}$ an.
   (b) Nunmehr setze man voraus, dass f beliebige Werte in $[0, \infty]$ annehmen kann und dass μ endlich ist. Beweisen Sie, dass f dann und nur dann μ–integrabel ist, wenn
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq n\}) < \infty$$
   gilt.

5. Beweisen Sie folgende Version des Satzes über die monotone Konvergenz:
   Sind $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ messbare Funktionen von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nach $\bar{\mathbb{R}}$ (nicht notwendig mit Werten in $[0, \infty]$) mit $\int_\Omega |f_1|\, \mathrm{d}\mu < \infty$, so folgt
   $$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega (\lim_{n\to\infty} f_n)\ \mathrm{d}\mu = \int_\Omega (\sup_n f_n)\ \mathrm{d}\mu\ .$$

Abgabe: In der Übung am 08.06.09 oder am 09.06.09