Stochastik I

Maß– und Integrationstheorie 2009

7. Serie

1. Für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei $(\Omega, \mathcal{A}_\mu, \bar{\mu})$ der vervollständigte Maßraum (vgl. Serie 3, Aufgabe 1). Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dann und nur dann messbar bzgl. $\mathcal{A}_\mu$ ist, wenn es zwei numerische $\mathcal{A}$–messbare Funktionen f_1 und f_2 mit $f_1 \leq f \leq f_2$ und $\mu(f_1 \neq f_2) = 0$ gibt.
   Hinweis: Man betrachte zum Beispiel die Menge $\mathcal{M}$ aller Funktionen f auf Ω für die solche Funktionen f_1, f_2 mit den angegebenen Eigenschaften existieren und zeige, dass $\mathcal{M}$ einfache $\mathcal{A}_\mu$–messbare Funktionen enthält und außerdem abgeschlossen gegen Grenzwertbildung ist.

2. Für eine nichtleere Menge Ω und einen messbaren Raum $(S, \mathcal{S})$ sei f eine Abbildung von Ω nach S. Dann bezeichne $\sigma(f)$ die kleinste σ–Algebra über Ω, für die f messbar ist.

   (a) Beweisen Sie, dass
   $$\sigma(f) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{S}\}$$
   gilt.

   (b) Bestimmen Sie $\sigma(f)$ für eine einfache Funktion f von Ω nach $\mathbb{R}$ und für die Abbildung f von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$ mit $f(x) := |x|$ (hierbei sei $\mathbb{R}$ mit der σ–Algebra der Borelmengen versehen und $|x|$ bezeichnet den Euklidischen Abstand im $\mathbb{R}^d$).

3. Berechnen Sie direkt mit Hilfe der Definition (also über die Approximation durch geeignete Treppenfunktionen) die Integrale $\int_0^1 x^2 \, d\lambda_1(x)$ und $\int_0^1 x^{-1} \, d\lambda_1(x)$.

4. Es sei V_0 der Vektorraum aller Borelmessbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass V_0 der kleinste Vektorraum V von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit folgenden beiden Eigenschaften ist:

   (a) V enthält die stetigen Funktionen und

   (b) wenn $(f_n)_{n \geq 1}$ eine wachsende Folge von nicht–negativen Funktionen in V ist, so dass $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jede reelle Zahl x existiert (in $\mathbb{R}$), dann gilt auch $f \in V$.

   Hinweis: Für einen Vektorraum V mit obigen beiden Eigenschaften setze man
   $$s(V) := \{A \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{1}_A \in V\} .$$
   Zuerst weise man nach, dass Intervalle der Form $(-\infty, a)$ in $s(V)$ liegen. Unter Verwendung des Haupttheorems über Dynkinsysteme folgere man dann hieraus $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq s(V)$.

Abgabe: In der Übung am 02.06.09 oder am 08.06.09