Stochastik I
Maß– und Integrationstheorie 2009

6. Serie

1. Konstruieren Sie zu $\alpha \in (0,1)$ eine kompakte Menge $K \subseteq [0,1]$ mit $\lambda_1(K) = \alpha$, so dass K keine nichtleere offene Menge enthält.
   Hinweis: Modifizieren Sie die Konstruktion des Cantorschen Diskontinuums in geeigneter Weise.

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt differenzierbar. Zeigen Sie, dass f' Borelmessbar ist.

3. Beweisen Sie, dass für zwei stetige Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\lambda_1\{x \in [a,b] \,:\, f(x) \neq g(x)\} = 0$ stets $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ folgt.

4. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $(S, \mathcal{S})$ ein messbarer Raum. Zwei bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{S}$ messbare Funktionen f und g von Ω nach S heißen μ–äquivalent, wenn f und g μ–fast überall übereinstimmen, d.h. $\mu\{f \neq g\} = 0$. Zeigen Sie, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf der Menge der $\mathcal{A}$–$\mathcal{S}$–messbaren Funktionen definiert wird.

5. Gegeben seien zwei messbare Räume $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(S, \mathcal{S})$ sowie ein Maß μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Für eine $\mathcal{A}$–$\mathcal{S}$–messbare Abbildung f von Ω nach S und für $B \in \mathcal{S}$ wird $(\mu \circ f^{-1})(B)$ durch
$$(\mu \circ f^{-1})(B) := \mu(f^{-1}(B)) = \mu\{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\}$$
definiert.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mu \circ f^{-1}$ ein Maß auf $(S, \mathcal{S})$ ist. Man nennt $\mu \circ f^{-1}$ das Bildmaß von μ bzgl. f .

   (b) Beweisen Sie, dass für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auch $\mathbb{P} \circ f^{-1}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. In diesem Fall schreibt man meist $\mathbb{P}_f$ an Stelle von $\mathbb{P} \circ f^{-1}$ und nennt $\mathbb{P}_f$ das Verteilungsgesetz der zufälligen Variablen f .

   (c) Sei μ die Einschränkung des Lebesguemaßes λ_2 auf $[0,1]^2$, es gilt also $\mu(B) = \lambda_2(B \cap [0,1]^2)$, und es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) := x \cdot y$ definiert. Berechnen Sie $\mu \circ f^{-1}([a,b])$ für $a < b$.

   (d) Für eine messbare einfache Funktion f von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nach $\mathbb{R}$ bestimme man $\mu \circ f^{-1}$.

Abgabe: In den Übungen am 25.05.09 oder am 26.05.09