Stochastik I
Maß– und Integrationstheorie 2009

5. Serie

1. Auf einer Menge Ω sei ein nichtleeres System $\mathcal{E}$ von Teilmengen aus Ω gegeben. Für $C \subseteq \Omega$ setzt man dann
$$\mathcal{E} \cap C := \{E \cap C : E \in \mathcal{E}\} .$$
   (a) Zeigen Sie, dass für eine σ–Algebra $\mathcal{A}$ über Ω auch $\mathcal{A} \cap C$ eine σ–Algebra über C bildet. Welche Mengen liegen in $\mathcal{A} \cap C$, wenn $C \in \mathcal{A}$ gilt ?
   Bemerkung: Man nennt $\mathcal{A} \cap C$ die Spur–σ–Algebra von $\mathcal{A}$ auf C.

   (b) Für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ hat man (über C)
$$\sigma(\mathcal{E} \cap C) = \sigma(\mathcal{E}) \cap C .$$
   Beweisen Sie diese Aussage.

   (c) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Für $C \subseteq \Omega$ sei $\widehat{C}$ eine messbare Hülle von C, wie in Aufgabe 3 der 4. Serie eingeführt. Für $A \cap C$ mit $A \in \mathcal{A}$ definiert man dann
$$\mu_C(A \cap C) := \mu(A \cap \widehat{C}) .$$
   Zeigen Sie, dass die Definition von μ_C unabhängig von der Wahl der messbaren Hülle und der Darstellung von $A \cap C$ ist.

   (d) Die Abbildung μ_C bildet sogar ein Maß auf $\mathcal{A} \cap C$, das sogenannte Spurmaß von μ auf $\mathcal{A} \cap C$. Der Nachweis dieser Aussage ist recht kompliziert und deshalb kein Teil der Übungsaufgabe. Wodurch ergeben sich die Schwierigkeiten ?

2. Jede nichtfallende Funktion $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ erzeugt entsprechend der Konstruktion in der Vorlesung ein Maß μ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Welches Maß erzeugt F mit
$$F(t) := \begin{cases} 0 & : \quad t \leq 0 \\ 1 & : \quad t > 0 \end{cases}$$

3. Zeigen Sie an einem Beispiel, dass man im Eindeutigkeitssatz für Maße nicht auf die $\cap$–Stabilität des Erzeugendensystems verzichten kann.
Hinweis: Man betrachte z.B. $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ und das Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ der Halbräume von der Form $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_j \leq \alpha\}$ für ein $j \in \{1, 2\}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Borelmenge. Zeigen Sie, dass dann für $\alpha \in \mathbb{R}$ auch
$$\alpha\, B := \{\alpha \cdot b : b \in B\}$$
eine Borelmenge ist. Man beweise
$$\lambda_d(\alpha\, B) = |\alpha|^d \cdot \lambda_d(B) .$$

Abgabe: In den Übungen am 18.05.09 oder am 19.05.09