Stochastik I

Maß– und Integrationstheorie 2009

<u>4. Serie</u>

1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein $\sigma$–endlicher Maßraum. Zeigen Sie, dass es dann höchstens abzählbar viele disjunkte Mengen aus $\mathcal{A}$ mit positivem Maß gibt, d.h. seien $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, mit $\mu(A_i) > 0$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so folgt, dass $I$ höchstens abzählbar unendlich sein kann.

2. Ein Maß auf den Borelmengen des $\mathbb{R}^d$ heißt regulär, wenn für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ stets
$$\begin{aligned} \mu(B) &= \inf\{\mu(G) : \, B \subseteq G, \, G \,\text{offen}\} \quad \text{und} \\ \mu(B) &= \sup\{\mu(K) : \, K \subseteq B, \, K \,\text{kompakt}\} \end{aligned}$$
gilt. Beweisen Sie, dass jedes endliche Borelmaß auf $\mathbb{R}^d$ regulär ist.
<u>Hinweis:</u> Man definiere $\mathcal{A}$ als Gesamtheit der Teilmengen $A$ von $\mathbb{R}^d$, für die zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $G$ und eine abgeschlossene Menge $F$ mit $F \subseteq A \subseteq G$ und $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$ existieren. Dann zeige man, dass $\mathcal{A}$ eine $\sigma$–Algebra bildet, die die abgeschlossenen Mengen enthält. Abschließend approximiere man abgeschlossene Mengen von innen durch kompakte Mengen.

3. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für $B \subseteq \Omega$ sei das äußere Maß $\mu^*(B)$ wie üblich durch
$$\mu^*(B) := \inf\{\mu(A) : B \subseteq A \, , \; A \in \mathcal{A}\}$$
definiert. Zeigen Sie, dass es eine Menge $\widehat{B} \in \mathcal{A}$ mit $\mu^*(B) = \mu(\widehat{B})$ und $B \subseteq \widehat{B}$ gibt, d.h. das Infimum in der obigen Definition wird stets angenommen. Ist $\widehat{B}$ eindeutig bestimmt ? Man nennt $\widehat{B}$ messbare Hülle von $B$.

4. Was würden Sie zu folgendem "Beweis" der Existenz einer nichtmessbaren Menge sagen ?
Angenommen, alle Teilmengen von $[0,1]$ wären Lebesgue–messbar. Dann wäre $\lambda_1(B)$ für $B \subseteq [0,1]$ stets definiert, insbesondere auch
$$A := \{\lambda_1(B) : \; B \subseteq [0,1], \; \lambda_1(B) \notin B\} \; .$$
Dann gilt $\lambda_1(A) \in A$, genau dann wenn $\lambda_1(A) \notin A$, was natürlich den gesuchten Widerspruch liefert. Wo steckt der Fehler ?

Abgabe: In den Übungen am 11.05.09 oder am 12.05.09