Stochastik I
Maß– und Integrationstheorie 2009

3. Serie

1. Für ein Maß μ auf einer σ–Algebra $\mathcal{A}$ wird $\mathcal{A}_\mu$ durch

$$\mathcal{A}_\mu := \{B \subseteq \Omega \,:\, \text{Es existieren } A_1, A_2 \in \mathcal{A} \text{ mit } A_1 \subseteq B \subseteq A_2 \text{ und } \mu(A_2 \setminus A_1) = 0\}$$

definiert.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_\mu$ eine σ–Algebra bildet mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$. Hierbei bezeichnet $\mathcal{A}_{\mu^*}$ die σ–Algebra der bzgl. μ^* (von μ erzeugtes äußeres Maß) messbaren Mengen.

   (b) Beweisen Sie, dass durch $\bar{\mu}(B) := \mu(A_1)$ mit $A_1 \subseteq B \subseteq A_2$ und $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$ ein Maß $\bar{\mu}$ auf $\mathcal{A}_\mu$ definiert wird. Insbesondere ist zu zeigen, dass $\bar{\mu}(B)$ nicht von der speziellen Wahl von A_1 abhängt. Beweisen Sie $\mu = \bar{\mu}$ auf $\mathcal{A}$. Welches Maß $\tilde{\mu}$ erhält man, wenn $\tilde{\mu}(B)$ durch $\mu(A_2)$ mit A_2 wie oben definiert wird ?

   (c) Weisen Sie die Identität $\bar{\mu} = \mu^*$ auf $\mathcal{A}_\mu$ nach.

   (d) Bestimmen Sie $\mathcal{A}_\mu$ und $\bar{\mu}$ für $\mu = \delta_x$ mit einem gewissen $x \in \Omega$ und einer beliebigen σ–Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω.

   Bemerkung: $\mathcal{A}_\mu$ nennt man die Vervollständigung von $\mathcal{A}$ bezüglich des Maßes μ, und $\bar{\mu}$ ist dann die Fortsetzung von μ auf die vervollständigte σ–Algebra.

2. Das Lebesguesche äußere Maß auf $\mathbb{R}^d$ werde mit λ_d^* bezeichnet. Es gilt also

$$\lambda_d^*(B) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_d(Q_j);\; B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \,, Q_j \text{ halboffener Quader in } \mathbb{R}^d \right\} \tag{1}$$

für jede Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^d$.

   (a) Zeigen Sie, dass die äußeren Maße, die man erhält, wenn man in (1) die halboffenen Quader durch abgeschlossene bzw. offene Quader ersetzt, mit λ_d^* übereinstimmen.

   (b) Beweisen Sie nur unter Verwendung von (1), dass für jede abzählbare Menge $B \subseteq \mathbb{R}^d$ stets $\lambda_d^*(B) = 0$ gilt.

   (c) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge B in $\mathbb{R}^d$ dann und nur dann Lebesgue-messbar (λ_d^*–messbar) ist, wenn

$$\mathrm{vol}_d(Q) = \lambda_d^*(Q \cap B) + \lambda_d^*(Q \cap B^c)$$

   für alle halboffenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt. Bleibt die Aussage richtig, wenn man halboffen durch offen bzw. durch abgeschlossen ersetzt ? Wie sehen diese Bedingungen für $d = 1$ aus ?

3. Sei λ_2^* das äußere Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\lambda_2^*(B)$ für eine Gerade B in $\mathbb{R}^2$.

Abgabe: In den Übungen am 04.05.09 oder am 05.05.09