Stochastik I
Maß– und Integrationstheorie 2009

2. Serie

1. Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra auf Ω, und μ sei eine endlichadditive Abbildung von $\mathcal{A}$ in $[0,\infty)$, d.h. insbesondere gilt $\mu(\Omega) < \infty$.

   (a) Zeigen Sie, dass unter obigen Voraussetzungen notwendigerweise $\mu(\emptyset) = 0$ gilt.

   (b) Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Eigenschaften:

      (i) μ ist σ–additiv.

      (ii) Für $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ (μ ist stetig in der leeren Menge).

      (iii) Aus $A_n \uparrow \Omega$ und $A_n \in \mathcal{A}$ folgt stets $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\Omega)$.

2. Sei $\mathcal{C}$ die Gesamtheit der offenen Quader des $\mathbb{R}^d$ mit rationalen Eckpunkten, d.h. es gilt $Q \in \mathcal{C}$ genau dann, wenn $Q = \{(x_1,\ldots,x_d);\ a_j < x_j < b_j,\ 1 \le j \le d\}$ mit geeigneten $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

3. Die Abbildung μ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sei durch $\mu(A) := \#(A \cap \mathbb{Q})$ definiert, d.h. $\mu(A)$ gibt die Anzahl der rationalen Zahlen in der Menge A an (insbesondere setzen wir $\mu(A) = \infty$, wenn unendlich viele rationale Zahlen in A liegen). Zeigen Sie, dass μ ein σ–endliches Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\mu(I) = \infty$ für alle nichtleeren Intervalle I ist.

4. Gegeben seien Maße μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$.

   (a) Zeigen Sie, dass für $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0$ auch $\mu := \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ mit $\mu(A) := \alpha_1\mu_1(A) + \alpha_2\mu_2(A)$ für $A \in \mathcal{A}$ ein Maß ist.

   (b) Es gelte $\mu_1 \le \mu_2 \le \cdots$, d.h. man hat $\mu_1(A) \le \mu_2(A) \le \cdots$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Beweisen Sie, dass durch

   $$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{A},$$

   ein Maß μ definiert wird.

   (c) Zeigen Sie, dass für beliebige Maße μ_n und für $\alpha_n \ge 0$ auch $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\mu_n$ ein Maß bildet.

   (d) Für $\Omega = \mathbb{R}$ und $x_n \in \mathbb{R}$ sei das Maß μ durch $\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x_n}$ definiert. Welche Eigenschaften muss die Folge $\{x_n\}$ besitzen, so dass μ σ–endlich ist ? Wann gilt für beschränkte Intervalle I stets $\mu(I) < \infty$?

   Hinweis: Ein Maß μ auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt σ–endlich, wenn $\Omega_n \in \mathcal{A}$ mit $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ und $\mu(\Omega_n) < \infty$ existieren.

Abgabe: In den Übungen am 27.04.09 oder am 28.04.09