Stochastik I

Maß– und Integrationstheorie 2009

1. Serie

1. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra von Teilmengen aus Ω. Zeigen Sie, dass die Algebra $\mathcal{A}$ dann und nur dann eine σ–Algebra ist, wenn sie eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

   (a) Aus $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ und $A_j \in \mathcal{A}$ folgt $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

   (b) Aus $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ und $A_j \in \mathcal{A}$ folgt $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

   (c) Für $A_1, A_2, \ldots$ aus $\mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ falls $i \neq j$, folgt $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

2. Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein beliebiges nichtleeres System von Teilmengen von Ω und sei $A_0 \in \sigma(\mathcal{E})$ eine feste Teilmenge. Zeigen Sie, dass es ein abzählbares Teilsystem $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$ mit $A_0 \in \sigma(\mathcal{E}_0)$ gibt.
   Hinweis: Betrachten Sie $\bigcup\{\sigma(\mathcal{S});\ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{E},\ \mathcal{S}\ \text{abzählbar}\}$.

3. Ein System $\mathcal{R}$ von Teilmengen aus Ω heißt Ring, wenn stets

   $$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \emptyset \in \mathcal{R} \\ \text{(ii)} & A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R} \\ \text{(iii)} & A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R} \end{array}$$

   gilt.

   (a) Zeigen Sie, dass ein Ring stets $\cap$–abgeschlossen ist.

   (b) Beweisen Sie, dass eine Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ dann und nur dann einen Ring bildet, wenn $[\mathcal{R}, \triangle, \cap]$ ein kommutativer Ring im Sinn der Algebra ist. Dabei entspricht $\triangle$ dem sonst üblichen $+$ (Addition)und $\cap$ dem $\cdot$ (Multiplikation).
   Hinweis 1: Die symmetrische Differenz $A \triangle B$ zweier Mengen A und B ist als $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ definiert.
   Hinweis 2: Eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ist bekannlich ein Ring (im Sinn der Algebra), wenn $(R, +)$ eine abelsche Gruppe bildet, die Multiplikation $\cdot$ assoziativ ist und die üblichen Distributivgesetze gelten.

   (c) Beweisen Sie folgende Aussage: Ein Ring $\mathcal{R}$ ist dann und nur dann eine Algebra, wenn $\Omega \in \mathcal{R}$ gilt.

   (d) Zeigen Sie, dass zu jeder nichtleeren Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ stets ein kleinster Ring $\mathcal{R}$ mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}$ existiert. $\mathcal{R}$ heißt der von $\mathcal{E}$ erzeugte Ring.

   (e) Sei Ω eine beliebige überabzählbare Menge und sei $\mathcal{E}$ die Gesamtheit der einpunktigen Mengen von Ω. Bestimmen Sie den von $\mathcal{E}$ erzeugten Ring, die erzeugte Algebra sowie die erzeugte σ–Algebra.

4. Es sei $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots$ eine Folge von σ–Algebren auf Ω. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ eine Algebra bildet, i.a. aber keine σ–Algebra.

Abgabe: In den Übungen am 20.04.09 oder am 21.04.09