Maß & Integrationstheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 13 - Lösungen

Stilianos Louca

18. Juli 2008

Lemma 01

Für Zahlen $a_{nm} \geq 0,\ n, m \in \mathbb{N}$ die in m und n jeweils monoton wachsend sind, gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{nm} = \lim_{k\to\infty} a_{kk}$$

Beweis: Da $(a_{nm})_m$ monoton wachsend ist, existiert der Grenzwert

$$\lim_{m\to\infty} a_{nm} =: a_n$$

Dabei sind die a_n auch wieder monoton wachsend, nennen

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{nm}$$

Fall: $a = \infty$, das heißt

$$\forall\ M > 0 : \exists\ n_M : \forall\ n \geq n_M : a_n > M + 1$$

also

$$\forall\ M > 0 : \exists\ n_M : \forall\ n \geq n_M : \exists\ m_n : \forall\ m \geq m_n : \underbrace{a_{nm}}_{<a_{n+1,m}} > M$$

Wegen $a_{n+1,m} \geq a_{nm}$ können wir o.B.d.A annehmen dass die m_n für ein festes M für alle $n \geq n_M$ konstant sind ($\rightarrow m_n = m_{n_M}$), das heißt

$$\forall\ M > 0 : \exists\ n_M,\ \exists\ m_{n_M} : \forall\ n \geq n_M\ \forall\ m \geq m_{n_M} : a_{nm} > M$$

Setzen wir $N := \max\{n_M, m_{n_M}\}$ so ist

$$\forall\ M > 0 : \exists\ N : \forall\ n > N : a_{NN} > M$$

also

$$\lim_{N\to\infty} a_{NN} = \infty$$

Fall: $a \in \mathbb{R}$, also $a_n \uparrow a \in \mathbb{R}$ bzw.

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ n_\varepsilon : \forall\ n \geq n_\varepsilon : a_n \in \left[a - \frac{\varepsilon}{2}, a\right]$$

das heißt

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ n_\varepsilon : \forall\ n \geq n_\varepsilon : \exists\ m_n : \forall\ m \geq m_n : a_{nm} \in [a - \varepsilon, a]$$

Analog zu vorhin, können wir annahmen dass für festes ε die m_n für $n \geq n_\varepsilon$ konstant sind ($\rightarrow m_n = m_{n_\varepsilon}$) also

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ N_\varepsilon : \forall\ n \geq N_\varepsilon : a_{nn} \in [a - \varepsilon, a]$$

das heißt

$$\lim_{N\to\infty} a_{NN} = a \quad \square$$

Bemerkung: Die Monotonie in nur einem Index ist im allgemeinen <u>nicht</u> hinreichend. Beispiel:

$$a_{nm} = \frac{m}{n}$$

Lemma 02

Sei $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum und $N \in \mathcal{M}$ eine Nullmenge: $\mu(N) = 0$. Dann folgt für beliebiges $A \in \mathcal{M}$: Ist $\mu(N^c \cap A) = 0$, so ist auch $\mu(A) = 0$.
Beweis: Es sei $\mu(N^c \cap A) = 0$. Dann gilt:

$$0 = \mu(N^c \cap A) = \mu(A \setminus N) \overset{\mu(N)<\infty}{=} \mu(A) - \underbrace{\mu(N)}_{0} = \mu(A)$$

$\square$

Aufgabe 01

a) Die Standardnormalverteilung ist definiert auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ gemäß

$$\mu_s(A) := \int_A \underbrace{\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}}_{\substack{\frac{d\mu_s}{d\lambda} \geq 0 \\ \text{messbar} \\ \text{da stetig}}} \lambda(dx)$$

Per Konstruktion ist $\mu_s \ll \lambda$, da definiert über eine Dichte.

b) Die Poisson-Verteilung ist auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ definiert gemäß

$$\mu_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} e^{-r} \cdot \delta_{\{n\}}$$

mit der Ereignisrate $r \geq 0$. Obwohl

$$\lambda(\{1\}) = 0$$

ist

$$\mu_p(\{1\}) = \frac{1}{e} \neq 0$$

das heißt es ist nicht $\mu_p \ll \lambda$.

c) Ganz analog ist auch die Poissonverteilung auf $(\mathbb{N}, \mathscr{B}(\mathbb{N}))$ definiert gemäß

$$\mu_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} e^{-r} \cdot \delta_{\{n\}}$$

Ist $m(A) = 0,\ A \subset \mathbb{N}$ so muss $A = \emptyset$ sein (da m Zählmaß) sein und somit offensichtlich $\mu_p(A) = 0$. Die Dichte $\frac{d\mu_p}{dm}$ von μ_p bzgl. m ist gegeben durch

$$\frac{d\mu_p}{dm} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} e^{-r} \cdot 1_{\{n\}}$$

d) Bekanntlich ist die Standardnormalverteilung μ_s ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das heißt insbesondere σ-endlich. Ferner ist

$$\frac{d\mu_s}{d\lambda} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} > 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Nach Aufgabe 02 (c) folgt dann auch $\lambda \ll \mu_s$ und

$$\frac{d\lambda}{d\mu_s} = \frac{1}{\frac{d\mu_s}{d\lambda}} = \sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Aufgabe 02

a) Es sei $A \in \mathcal{M}$ eine m-Nullmenge, das heißt $m(A) = 0$. Dann ist

$$(a\mu + b\nu)(A) \overset{\text{def.}}{=} a \underbrace{\mu(A)}_{0} + b \underbrace{\nu(A)}_{=0} = 0$$

das heißt es ist $a\mu + b\nu \ll m$. Da m σ-endlich ist, existieren die eindeutigen (bis auf Nullmengen) Dichten

$$\frac{d\mu}{dm} =: \partial_m \mu, \ \frac{d\nu}{dm} =: \partial_m \nu$$

und es gilt für $A \in \mathcal{M}$:

$$(a\mu + b\nu)(A) = a\mu(A) + b\nu(A) \overset{\text{def.}}{=} a \int\limits_A \partial_m \mu \ dm + b \int\limits_A \partial_m \nu \ dm \overset{\text{Linearität}}{=} \int\limits_A \underbrace{(a\partial_m \mu + b\partial_m \nu)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{messbar}}} \ dm$$

das heißt es ist

$$\partial_m (a\mu + b\nu) = a\partial_m \mu + b\partial_m \nu$$

m-fast überall. Diese Dichte ist eindeutig, da $(a\mu + b\nu)$ absolut stetig bzgl. m ist.
$\square$

b) Es sei $m(A)$ für ein bestimmtes $A \in \mathcal{M}$. Da $\mu \ll m$ ist $\mu(A) = 0$. Da $\nu \ll \mu$ ist dann auch $\nu(A) = 0$. Somit ist $\nu \ll m$ und es existiert die Dichte $\partial_m \nu$. Die (bis auf Nullmengen eindeutigen) Dichten $\partial_\mu \nu, \ \partial_m \mu$ sind nicht negativ, messbar, das heißt es existieren nicht-negative, einfache Funktionen $f_n \uparrow \partial_\mu \nu, \ g_n \uparrow \partial_m \mu$:

$$f_n = \sum_{k=1}^{N_n} 1_{A_{nk}} F_{nk} \ , \ g_n = \sum_{l=1}^{M_n} 1_{B_{nl}} G_{nl}$$

Somit gilt für $A \in \mathcal{M}$:

$$\nu(A) = \int\limits_A \partial_\mu \nu \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_M 1_A \cdot f_n \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_M 1_A \cdot \sum_{k=1}^{N_n} 1_{A_{nk}} F_{nk} \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} \int\limits_M \underbrace{1_A 1_{A_{nk}}}_{1_{A\cap A_{nk}}} F_{nk} \ d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} F_{nk} \cdot \mu(A \cap A_{nk}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} F_{nk} \cdot \int\limits_{A\cap A_{nk}} \partial_m \mu \ dm = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} F_{nk} \cdot \lim_{m\to\infty} \int\limits_{A\cap A_{nk}} g_m \ dm$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} F_{nk} \cdot \lim_{m\to\infty} \int\limits_M 1_{A\cap A_{nk}} \cdot \sum_{l=1}^{M_m} 1_{B_{ml}} G_{ml} \ dm = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} F_{nk} \cdot \lim_{m\to\infty} \sum_{l=1}^{M_m} \int\limits_M 1_{A\cap A_{nk}\cap B_{ml}} \cdot G_{ml} \ dm$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} F_{nk} \sum_{l=1}^{M_m} \int\limits_M G_{ml} \underbrace{1_{A\cap A_{nk}\cap B_{ml}}}_{1_A \cdot 1_{A_{nk}\cap B_{ml}}} \ dm = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \int\limits_A \underbrace{\sum_{k=1}^{N_n} \sum_{l=1}^{M_m} F_{nk} G_{ml} 1_{A_{nk}\cap B_{ml}}}_{f_n \cdot g_m} \ dm$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \underbrace{\int\limits_A \overbrace{f_n \cdot g_m}^{\substack{\text{nicht-negativ} \\ \text{einfach}}} \ dm}_{\substack{=: a_{nm} \geq 0 \\ \text{monoton wachsend} \\ \text{in } n \text{ und } m}} \overset{\text{Lemma 01}}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n \cdot g_n \ dm$$

Wegen $f_n \cdot g_n \uparrow \partial_\mu \nu \cdot \partial_m \mu$ ist also

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \cdot g_n \; dm \overset{\text{B. Levi}}{=} \int_A \partial_\mu \nu \cdot \partial_m \mu \; dm$$

das heißt es ist

$$\partial_m \nu = \partial_\mu \nu \cdot \partial_m \mu$$

m-fast überall.

Variante: Aus der Vorlesung wissen wir für messbare (erweitert reell) Funktionen h:

$$\int_A h(x) \; d\mu(x) = \int_A h(x) \; \frac{d\mu}{dm}(x) \; dm(x)$$

Somit folgt sofort

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} \; d\mu = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{dm} \; dm$$

$\square$

c) Es sei $A \in \mathcal{M}$ mit $\mu(A) = 0$, das heißt

$$\mu(A) = \int_A \partial_m \mu \; dm = \int_M \underbrace{1_A \cdot \partial_m \mu}_{\geq 0} \; m = 0$$

Dann ist $1_A \cdot \partial_m \mu = 0$ m-fast überall:

$$m(\underbrace{\{\partial_m \mu \neq 0\}}_{\{\partial_m \mu = 0\}^c} \cap A) = 0 \overset{\text{Lemma 02}}{\Longrightarrow} m(A) = 0$$

also ist $m \ll \mu$. Somit existiert $\partial_\mu m$. Die Funktion $\frac{1}{\frac{d\mu}{dm}}$ ist messbar (erweitert reell), denn für $A = [-\infty, a), \; a \in \mathbb{R}$ ist mit

$$\frac{1}{A} := \left\{ \frac{1}{y} : y \in A \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{1}{a}, 0\right] & : a < 0 \\ [-\infty, 0] \cup \left(\frac{1}{a}, \infty\right] & : a > 0 \\ (-\infty, 0] & : a = 0 \end{array} \right\} \in \mathscr{B}(\hat{\mathbb{R}}) \; , \; \frac{1}{0} := \infty, \; \frac{1}{\pm\infty} := 0$$

entsprechend

$$\left[\frac{1}{\frac{d\mu}{dm}}\right]^{-1}(A) = \underbrace{\left[\frac{d\mu}{dm}\right]^{-1}}_{\text{messbar}} \underbrace{\left(\frac{1}{A}\right)}_{\in \mathscr{B}(\hat{\mathbb{R}})} \in \mathcal{M}$$

Somit folgt dann

$$\int_A \frac{1}{\frac{d\mu}{dm}} \; d\mu = \int_A \frac{1}{\frac{d\mu}{dm}} \cdot \frac{d\mu}{dm} \; dm = \int_A dm = m(A)$$

das heißt

$$\frac{1}{\frac{d\mu}{dm}} = \frac{dm}{d\mu} \qquad m \text{ fast überall}$$

Jede m-Nullmenge ist auch μ-Nullmenge, das heißt es ist auch

$$\frac{1}{\frac{d\mu}{dm}} = \frac{dm}{d\mu} \qquad \mu \text{ fast überall}$$

$\square$

Aufgabe 03

a) **Richtung "⇒":** Indirekter Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ so dass

$$\forall\, \delta > 0 : \exists\, A \in \mathscr{A} : m(A) \leq \delta \ \wedge\ \mu(A) > \varepsilon \tag{1}$$

Wählen eine Folge $\underbrace{\delta_n}_{>0} \to 0$ die genügend schnell abfällt so dass

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \delta_n = 0 \tag{2}$$

(z.B $\delta_n := 2^{-n}$) und dazu entsprechende Mengen $A_n \in \mathscr{A}$ mit $m(A_n) \leq \delta_n \ \wedge\ \mu(A_n) > \varepsilon$. Definieren dazu

$$B_k := \bigcup_{n\geq k} A_n$$

Dann gilt:

$$m(B_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \underbrace{m(A_n)}_{\leq \delta_n} \leq \sum_{n=k}^{\infty} \delta_n \overset{(2)}{<} \infty \tag{3}$$

$$m\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) \overset{\substack{(3)\\ B_{k+1}\subset B_k}}{=} \lim_{k\to\infty} m(B_k) \overset{(3)}{\leq} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \delta_n \overset{(2)}{=} 0$$

Jedoch ist

$$\mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) \overset{\substack{\mu \text{ endlich}\\ B_{k+1}\subset B_k}}{=} \lim_{k\to\infty} \underbrace{\mu(B_k)}_{\geq \mu(A_k)} \geq \inf_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\mu(A_k)}_{>\varepsilon} \geq \varepsilon$$

was ein Widerspruch zu $\mu \ll m$ ist.

Richtung "⇐": Es gelte:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \forall\, A \in \mathscr{A} : m(A) \leq \delta \ \Rightarrow\ \mu(A) \leq \varepsilon \tag{4}$$

und es sei $m(A) = 0$ für ein $A \in \mathcal{M}$. Da m σ-endlich ist, lässt sich m eindeutig von $\mathscr{A}$ auf $\mathcal{M} = \sigma(\mathscr{A})$ fortsetzen und es gilt

$$m(A) = \inf_{A\subset B\in\mathscr{A}_\sigma} m(B) \tag{5}$$

Indirekter Beweis: Annahme: $\mu(A) = c > 0$. Sei $0 < \varepsilon < c$ beliebig, dazu δ_ε. Nach (5) existiert ein $B \in \mathscr{A}_\sigma$ mit

$$m(A) \leq m(B) \leq \delta_\varepsilon\ ,\ A \subset B$$

wobei

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\ ,\ B_n \subset B_{n+1} \in \mathscr{A}$$

das heißt insbesondere

$$m(B_n) \leq m(B) \leq \delta_\varepsilon \ \to\ \mu(B_n) \leq \varepsilon \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Aufgrund der Stetigkeit von unten gilt

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \varepsilon$$

und wegen $A \subset B$ sogar $\mu(A) \leq \mu(B) \leq \varepsilon$ was ein Widerspruch zu $\mu(A) = c > \varepsilon$ ist.

b) Für die Algebra

$$\mathscr{A} := \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k) \subset \mathbb{R} : -\infty \leq a_k \leq b_k \leq a_{k+1} \leq \infty,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

gilt nach Übungsserie 06: $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Außerdem ist λ auf $\mathscr{A}$ σ-endlich, denn

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{[-n, n]}_{\in\mathscr{A}}\ ,\ \lambda([-n,n)) = 2n < \infty$$

Dann ist nach Teil (a) $\mu \ll \lambda$ genau dann wenn $\forall\, \varepsilon > 0$ ein δ_ε existiert mit

$$\forall\, A \in \mathscr{A} : \lambda(A) \leq \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; \mu(A) \leq \varepsilon$$

Doch für $A = \bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{[a_k, b_k)}_{\substack{\text{paarweise}\\ \text{disjunkt}}} \in \mathscr{A}$ ist genau

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k)\right) \overset{\sigma-\text{additivität}}{=} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\lambda([a_k, b_k))}_{(b_k - a_k)} = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

und

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k)\right) \overset{\sigma-\text{additivität}}{=} \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\mu\left([a_k, b_k)\right)}_{F(b_k) - F(a_k)} \overset{\substack{F\ \text{monoton}\\ \text{wachsend}}}{=} \sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)|$$

$\square$

Aufgabe 04

Nennen $A := T^* \circ T$ und betrachten das System

$$\mathcal{S} = \left\{ z_i = \|Tx_i\|^{-1} \cdot Tx_i : i = 1, .., n,\ Tx_i \neq 0 \right\}$$

wobei die $x_1, .., x_n$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A zu den jeweiligen eigenwerten λ_i bilden. Für beliebige $z_i, z_j \in \mathcal{S}$ gilt dann:

$$\langle z_i, z_j \rangle = \left\langle \|Tx_i\|^{-1} \cdot Tx_i, \|Tx_j\|^{-1} \cdot Tx_j \right\rangle = \frac{\langle Tx_i, Tx_j \rangle}{\|Tx_i\| \cdot \|Tx_j\|} = \frac{\langle x_i, T^*Tx_j \rangle}{\|Tx_i\| \cdot \|Tx_j\|} = \lambda_j \cdot \frac{\overbrace{\langle x_i, x_j \rangle}^{\delta_{ij}}}{\|Tx_i\| \cdot \|Tx_j\|}$$

$$= \lambda_j \cdot \frac{\delta_{ij}}{\|Tx_i\| \cdot \|Tx_i\|} = \frac{\lambda_i \delta_{ij}}{\langle Tx_i, Tx_i \rangle} \overset{\text{analog}}{=} \frac{\lambda_i \delta_{ij}}{\underbrace{\lambda_i}_{\substack{\neq 0\\ \text{da } \|Tx_i\| \neq 0}} \underbrace{\langle x_i, x_i \rangle}_{1}} = \delta_{ij}$$

das heißt $\mathcal{S}$ ist ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^n$, und kann somit zu einer Orthonormalbasis $\{z_1, .., z_n\}$ fortgesetzt werden. Definieren wir

$$Ox_i := z_i$$

so ist bekanntlich $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale lineare Abbildung (da Basistransformation zwischen zwei Orthonormalbasen). Definieren wir schließlich den Endomorphismus

$$S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\ ,\ Sz_i := Tx_i,\ i = 1, .., n$$

so gilt

$$S \underbrace{Ox_i}_{z_i} = Sz_i = Tx_i \;\to\; S \circ O = T$$

Zu zeigen bleibt: S ist symmetrisch, das heißt $S^* = S$. Tatsächlich gilt:

$$Tx_{i,j} \neq 0\ :\ \langle z_i, Sz_j \rangle = \left\langle \frac{Tx_i}{\|Tx_i\|}, Tx_j \right\rangle = \frac{\langle Tx_i, Tx_j \rangle}{\|Tx_i\|} = \frac{\lambda_j \delta_{ij}}{\|Tx_i\|} = \frac{\lambda_i \delta_{ji}}{\|Tx_j\|} \overset{\text{analog}}{=} \langle z_j, Sz_i \rangle = \langle Sz_i, z_j \rangle$$

$$Tx_{i,j} = 0\ :\ \langle z_i, Sz_j \rangle = \langle z_i, Tx_j \rangle = \langle z_i, 0 \rangle = \langle 0, z_j \rangle = \langle Tx_i, z_j \rangle = \langle Sz_i, z_j \rangle$$

$$Tx_i = 0 \neq Tx_j\ :\ \langle z_i, Sz_j \rangle = \langle z_i, Tx_j \rangle = \|Tx_j\| \cdot \left\langle z_i, \frac{Tx_j}{\|Tx_j\|} \right\rangle = \|Tx_j\| \cdot \underbrace{\langle z_i, z_j \rangle}_{\delta_{ij}} \overset{i \neq j}{=} 0 = \langle 0, z_j \rangle = \langle Tx_i, z_j \rangle = \langle Sx_i, z_j \rangle$$

$\square$