Übungen zur Vorlesung
"Maß und Integral"

SS 2008

13. Serie

1. Bei folgenden Maßen μ und m auf $(M, \mathcal{M})$ prüfe man, ob absolute Stetigkeit $\mu \ll m$ vorliegt und, wenn ja, so gebe man die Dichte $\frac{d\mu}{dm}$ an! 4 P

   (a) $(M, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), \mu$ – Standardnormalverteilung, m – Lebesgue-Maß.

   (b) $(M, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), \mu$ – Bildmaß einer Poisson-verteilten zufälligen Größe auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), m$ – Lebesgue-Maß.

   (c) $(M, \mathcal{M}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}\mathbb{N})$, wobei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null ist, μ – Poisson-Verteilung, m – Zählmaß.

   (d) $(M, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), \mu$ – Lebesgue-Maß, m – Standardnormalverteilung.

2. Es seien μ, ν und m σ-endliche Maße auf $(M, \mathcal{M})$. Man beweise die folgenden Eigenschaften: 5 P

   (a) Es gelte $\mu \ll m$ und $\nu \ll m$. Dann folgt für alle $a, b \geq 0$ die Beziehung $a\mu + b\nu \ll m$ und
   $$\frac{d(a\mu + b\nu)}{dm} = a\frac{d\mu}{dm} + b\frac{d\nu}{dm} \qquad m\text{-f.ü.}$$

   (b) Es gelte $\nu \ll \mu$ und $\mu \ll m$. Dann folgt $\nu \ll m$ und
   $$\frac{d\nu}{dm} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{dm} \qquad m\text{-f.ü.}$$

   (c) Es gelte $\mu \ll m$ und
   $$\frac{d\mu}{dm} > 0 \qquad m\text{-f.ü.}$$
   Dann folgt $m \ll \mu$ und
   $$\frac{dm}{d\mu} = \frac{1}{\frac{d\mu}{dm}} \qquad \mu\text{-f.ü.} \quad \text{und} \qquad m\text{-f.ü.}$$
   (Vereinbarung: $\frac{1}{0} = +\infty$.)

3. Es sei μ ein endliches Maß und m ein weiteres Maß auf $(M, \mathcal{M})$. Weiterhin sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{M}$ erzeugende Algebra. Das Maß m sei σ-endlich auf $\mathcal{A}$. 5 P

(a) Man zeige, daß genau dann $\mu \ll m$ gilt, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für jedes $A \in \mathcal{A}$

$$m(A) \leq \delta \Rightarrow \mu(A) \leq \varepsilon$$

erfüllt ist.

(b) Sei nun $(M, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $m = \lambda$ (Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$). Weiterhin sei F eine μ-erzeugende Funktion:

$$F(b) - F(a) = \mu([a,b)), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Man zeige dann, daß genau dann $\mu \ll \lambda$ gilt, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für beliebige paarweise disjunkte Intervalle $[a_1, b_1), \ldots, [a_n, b_n)$ die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \leq \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| \leq \varepsilon$$

erfüllt ist. (Eine reelle Funktion F mit dieser Eigenschaft heißt absolut stetig.)

4*. Es sei T eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$. Man zeige, daß dann T eine Zerlegung 4 P

$$T = S \circ O$$

besitzt, wobei O eine orthogonale lineare Abbildung und S eine symmetrische lineare Abbildung mit nichtnegativen Eigenwerten ist.

Hinweis: Es sei T^* die zu T adjungierte lineare Abbildung. Dann ist $A = T^* \circ T$ symmetrisch. Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation existert eine orthonormierte Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ von Eigenvektoren von A. Man zeige, daß das System

$$\{z_i = |T(x_1)|^{-1} \cdot T(x_i) : i = 1, \ldots, n;\ T(x_i) \neq 0\}$$

ein orthonormiertes System darstellt. Man fülle dieses orthonormierte System zu einer orthonormierten Basis $\{z_1, \ldots, z_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ auf. Nun definiere man

$$O(x_1) = z_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

und S derart, daß die obige Beziehung erfüllt ist. Man beweise, daß O und S die geforderten Eigenschaften besitzen.

Abgabe: 1. Gruppe: Montag, 15. Juli 2008, zur Übungszeit
2. Gruppe: Dienstag, 16. Juli 2008, zur Übungszeit

---

* Zusatzpunkte