Maß & Integrationstheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 12 - Lösungen

Stilianos Louca

20. Juli 2008

Lemma 01

Sei (M, ρ) ein metrischer Raum, $B \in \mathscr{B}(M)$ eine Borelmenge. Diese werde mit der Metrik $\rho_B := \rho\mid_B$ zu einem metrischen Unterraum von M. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine auf B stetige Funktion. Dann ist $f \cdot 1_B$, definiert durch

$$(f \cdot 1_B)(x) := \begin{cases} f(x) & : x \in B \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

von $(M, \mathscr{B}(M))$ nach $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ messbar.

Beweis: Der Raum (B, ρ_B) mit $\rho_B := \rho\mid_B$ ist metrischer Unterraum von M, so dass gilt $\mathscr{B}(B) = \mathscr{B}(M) \cap B$ (vgl. Übungsserie 08). Da $f : (B, \rho_B) \to (\mathbb{R}, \rho)$ stetig ist, ist f von $(B, \underbrace{\mathscr{B}(M) \cap B}_{\mathscr{B}(B)})$ nach $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ messbar, das heißt

$$\forall\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(A) \in \mathscr{B}(M) \cap B \overset{B \in \mathscr{B}(M)}{\subset} \mathscr{B}(M)$$

Daraus folgt: $f \cdot 1_B$ ist von $(M, \mathscr{B}(M))$ nach $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ messbar, denn

$$\forall\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : (f \cdot 1_B)^{-1}(A) = \left\{ \begin{array}{ll} f^{-1}(A) \cup (M \setminus B) & : 0 \in A \\ \\ f^{-1}(A) & : 0 \notin A \end{array} \right\} \in \mathscr{B}(M) \quad \Box$$

Bemerke: Insbesondere gilt das Lemma für $M = \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 01

Betrachten die Diagonale

$$D = \left\{ (x_1, x_2) \subset \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Als eindimensionaler Unterraum ist diese bekanntlich abgeschlossen. Da $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ bekanntlich auch alle abgeschlossenen Mengen enthält (da Komplemente offener Mengen) ist

$$D \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) \overset{\text{Übungsserie 11}}{=} \mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

Alternativ kann man sagen: $D = \{x_1 - x_2 = 0\}$ ist Borel-Menge da die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ,\ f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

und $g \equiv 0$ stetig also $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$-messbar sind.
Somit ist insbesondere die Indikatorfunktion 1_D messbar über $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$.
Definieren nun die Maße μ_1, μ_2 auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$:

$$\mu_1 \equiv \lambda \quad , \quad \mu_2(A) = \begin{cases} 0 & : A = \emptyset \\ \infty & : \text{sonst} \end{cases}$$

und schreiben:

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{1_D}_{1_{\{x_1=x_2\}}} \ \mu_2(dx_2)\ \mu_1(dx_1) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{1_{\{x_1\}}}_{\text{einfach}}(x_2)\ \mu_2(dx_2)\ \mu_1(dx_1) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mu_2(\{x_1\})}_{\infty}\ \mu_1(dx_1) = \infty \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mu_1(dx_1)}_{\lambda(\mathbb{R})=\infty} = \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} 1_D\ \mu_1(dx_1)\ \mu_2(dx_2) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{1_{\{x_2\}}}_{\text{einfach}}(x_1)\ \mu_1(dx_1)\ \mu_2(dx_2) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mu_1(\{x_2\})}_{\lambda(\{x_2\})=0} \mu_2(dx_2) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{0}_{\text{einfach}}\ \mu_2(dx_2) = 0 \cdot \mu_2(\mathbb{R}) = 0$$

Aufgabe 02

a) Betrachten die Schnittfunktionen

$$f_x(y) := f(x,y)\ ,\ \ f^y(x) := f(x,y)$$

und die Erweiterungen

$$g_x(y) := \begin{cases} f_x(y) & : y \in (0,1] \\ \frac{1}{x^2} & : y = 0 \end{cases} \ ,\ \ g^y(x) := \begin{cases} f^y(x) & : y \in (0,1] \\ -\frac{1}{y^2} & : x = 0 \end{cases}$$

Diese sind für beliebige $x, y \in (0,1]$ jeweils stetig und beschränkt auf ganz $[0,1]$, das heißt deren Riemann-Integral über $[0,1]$ existiert und ist identisch dem entsprechenden Lebesque-Integral:

$$\int_0^1 g_x(y)\ dy = \int_{[0,1]} g_x(y)\ \lambda(dy)\ ,\ \ \int_0^1 g^y(x)\ dx = \int_{[0,1]} g^y(x)\ \lambda(dx)$$

Somit ist

$$\int_0^1 g_x(y)\ dy = \int_0^1 f_x(y)\ dy = \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2(x-iy)^2} + \frac{1}{2(x+iy)^2}\right]\ dy = \frac{1}{x^2+1}$$

$$= \int_{[0,1]} g_x(y)\ \lambda(dx) = \int_{[0,1]} \left[1_{\{0\}} \cdot \frac{1}{x^2} + 1_{(0,1]} \cdot g_x(y)\right]\ \lambda(dx) = \frac{1}{x^2} \cdot \underbrace{\lambda(\{0\})}_{0} + \int_{[0,1]} 1_{(0,1]} \cdot f_x(y)\ \lambda(dy)$$

$$\overset{\text{def}}{=} \int_{(0,1]} f_x(y)\ \lambda(dy) =: F_1(x)$$

$$\text{Analog: } F_2(y) := \int_{(0,1]} f^y(x)\ dx = \int_0^1 g^y(x)\ dx = -\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\ dx = -\frac{1}{y^2+1}$$

Die beiden Resultierenden Funktionen F_1, F_2 sind ebenfalls jeweils stetig und beschränkt auf $[0,1]$, das heißt analog zu vorhin ist

$$\int_{(0,1]} F_1(x)\ \lambda(dx) = \int_0^1 F_1(x)\ dx = \frac{\pi}{4}\ \ ,\ \ \int_{(0,1]} F_2(y)\ \lambda(dy) = \int_0^1 F_2(y)\ dy = -\frac{\pi}{4}$$

b) Die Ungleichheit der iterierten Integrale resultiert aus der Tatsache dass das Integral

$$\int_{(0,1]^2} f(x,y)\ \lambda^2(d(x,y))$$

an sich <u>nicht</u> existiert.
Beweis:

- Die Funktion $f \cdot 1_{(0,1]^2}$ ist nach Lemma 01 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$-messbar, da stetig auf $\underbrace{(0,1]^2}_{\text{Borelmenge}}$. Somit macht

$$\int\limits_{(0,1]^2} f(x)\ \lambda^2(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x) \cdot 1_{(0,1]^2}(x)\ \lambda^2(dx)$$

einen Sinn.

- Betrachten

$$f^+ = 1_{\{f \geq 0\}} \cdot f \cdot 1_{(0,1]^2} = 1_{\{x \geq y\}} \cdot f \cdot 1_{(0,1]^2} \quad , \quad f^- = 1_{\{f \leq 0\}} \cdot f \cdot 1_{(0,1]^2} = 1_{\{x \leq y\}} \cdot f \cdot 1_{(0,1]^2}$$

Dann sind $f^\pm$ $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$-messbar, denn: Die Funktion $h(x,y) := x - y$ ist stetig, also messbar, so dass die Mengen $\{x \geq y\} = \{x - y \geq 0\}$ und $\{x \leq y\} = \{x - y \leq 0\}$ Borelmengen sind, das heißt $f^\pm$ sind Produkte messbarer Funktionen.

- Da das Integral $\int\limits_{(0,1]^2} f^+\ \lambda^2(d(x,y))$ existiert, können wir nach dem Satz von Fubini schreiben

$$\int\limits_{(0,1]^2} f^+\ \lambda^2(d(x,y)) = \int\limits_{(0,1]} \int\limits_{(0,1]} \underbrace{f^+(x,y)}_{\substack{\text{stetig} \\ \text{\& beschränkt} \\ \text{auf } [0,1] \\ \text{für } x \in (0,1]}}\ \lambda(dy)\ \lambda(dx)$$

Analog zu vorhin ergibt sich für $x \in (0,1]$:

$$F^+(x) := \int\limits_{(0,1]} f^+(x,y)\ \lambda(dy) = \int\limits_0^1 f^+\ dy = \int\limits_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)}\ dy = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x - iy} - \frac{1}{x + iy}\right]_{y=0}^x = \frac{1}{2x}$$

Betrachten nun die monoton wachsende, nach F^+ konvergierende Funktionenfolge

$$F_n^+ := 1_{[1/n,1]} \cdot F^+$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist F_n^+ nicht-negativ, messbar und beschränkt auf $[1/n, 1]$, das heißt es ist

$$\int\limits_{(0,1]} F_n^+(x)\ \lambda(dx) = \int\limits_{[1/n,1]} F_n^+(x)\ \lambda(dx) = \int\limits_{1/n}^1 F_n^+(x)\ dx = \frac{1}{2}\int\limits_{1/n}^1 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \cdot [\ln x]_{1/n}^1 = \frac{1}{2}\ln n$$

Nach dem Satz von Levi gilt dann

$$\int\limits_{(0,1]^2} f^+\ \lambda^2(d(x,y)) = \int\limits_{(0,1]} F^+\ \lambda(dx) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{(0,1]} F_n^+\ \lambda(dx) = \infty$$

Auf ganz analoger weise ergibt sich

$$\int\limits_{(0,1]} f^-\ \lambda^2(d(x,y)) = \infty$$

Somit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Aufgabe 03

a) Die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{(x_1 + x_2)^2}$$

ist auf $M := [3,4] \times [1,2]$ beschränkt, stetig und positiv. Somit ist sie messbar und es existiert das Integral $\int\limits_M f(x)\ \lambda^2(dx)$ und es gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int\limits_M f(x)\ \lambda^2(dx) \overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{[3,4]} \int\limits_{[1,2]} \underbrace{f(x_1,x_2)}_{\substack{\text{stetig}\\ \text{\& beschränkt}}}\ \lambda(dx_2)\ \lambda(dx_1) = \int\limits_{[3,4]} \int\limits_1^2 f(x_1,x_2)\ dx_2\ \lambda(dx_1)$$

$$= \int\limits_{[3,4]} \left[\frac{-1}{x_1+x_2}\right]_{x_2=1}^2 \lambda(dx_1) = \int\limits_{[3,4]} \underbrace{\left[\frac{1}{x_1+1} - \frac{1}{x_1+2}\right]}_{\substack{\text{stetig}\\ \text{\& beschränkt}\\ \text{auf } [3,4]}} \lambda(dx_1) = \int\limits_3^4 \left[\frac{1}{x_1+1} - \frac{-1}{x_1+2}\right]\ dx_1$$

$$= [\ln(x_1+1) - \ln(x_1+2)]_{x_1=3}^4 = \ln\frac{25}{24}$$

b) Die Funktion

$$f(x) := \frac{x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ist stetig, beschränkt und positiv auf $M := [0,1]^2$. Sie ist somit messbar und das Integral $\int\limits_M f(x)\ \lambda^2(dx)$ existiert, so dass nach dem Satz von Fubini gilt

$$\int\limits_M f(x)\ \lambda^2(dx) \overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{[0,1]} \int\limits_{[0,1]} \underbrace{f(x_1,x_2)}_{\substack{\text{stetig}\\ \text{\& beschränkt}\\ \text{auf } x_1\in[0,1]\\ \text{messbar}\\ \text{da Schnittfunktion}}}\ \lambda(dx_2)\ \lambda(dx_1) = \int\limits_{[0,1]} \int\limits_0^1 f(x_1,x_2)\ dx_2\ \lambda(dx_1)$$

$$= \int\limits_{[0,1]} x_2^2 \underbrace{\left[-\frac{1}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}\right]_{x_2=0}^1}_{\substack{\text{stetig}\\ \text{\& beschränkt}\\ \text{auf } x_1\in[0,1]}} \lambda(dx_1) = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{2+x_1^2}}\right]\ dx_1$$

$$= \left[\operatorname{arcsinh}(x_1) - \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\right]_{x_2=0}^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \operatorname{arcsinh}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) **Nennen um:** $R := \sqrt{R}$.
Die Funktion $f(x) := x_2^2\sqrt{R^2-x_1^2}$ ist auf $B_R^o(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < R\}$ beschränkt, positiv und stetig so dass sich

analog zu vorhin ergibt

$$\int_{B_R^\circ(0)} f(x)\ \lambda^2(dx) \overset{\text{def}}{=} \int_{[-R,R]^2} 1_{B_R^\circ(0)}(x)\cdot f(x)\ \lambda^2(dx) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{[-R,R]}\int_{[-R,R]} \underbrace{1_{B_R^\circ(0)}(x_1,x_2)\cdot f(x_1,x_2)}_{\substack{\text{stetig}\\ \text{\& beschränkt}\\ \text{auf } x_2\in[-R,R]}} \lambda(dx_2)\ \lambda(dx_1)$$

$$= \int_{[-R,R]}\int_{-R}^{R} 1_{B_R^\circ(0)}(x)\cdot f(x)\ dx_2\ \lambda(dx_2) = \int_{[-R,R]}\int_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}} f(x_1,x_2)\ dx_2\ \lambda(dx_1)$$

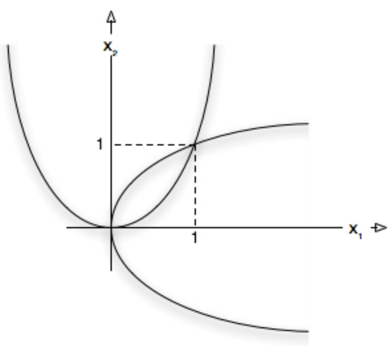
$$= \int_{[-R,R]} \sqrt{R^2-x_1^2}\cdot\left[\frac{x_2^3}{3}\right]_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}} \lambda(dx_1) = \frac{2}{3}\int_{[-R,R]} \underbrace{\left(R^2-x_1^2\right)^2}_{\substack{\text{stetig}\\ \text{\& beschränkt}\\ \text{auf } x_1\in[0,R]}} \lambda(dx_1) = \frac{2}{3}\int_{-R}^{R}\left(R^4+x_1^4-2R^2x_1^2\right)\ dx_1 = \frac{32}{45}R^5$$

d) Analog zu vorhin ist

$$\int_F (x_1^2+x_2)\ \lambda^2(dx) \overset{\text{def}}{=} \int_{[0,1]^2} (x_1^2+x_2)\cdot 1_F(x_1,x_2)\ \lambda^2(dx) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} \underbrace{(x_1^2+x_2)\cdot 1_F(x_1,x_2)}_{\substack{\text{stetig}\\ \text{\& beschränkt}\\ \text{auf } x_2\in[0,1]}} \lambda(dx_2)\ \lambda(dx_2)$$

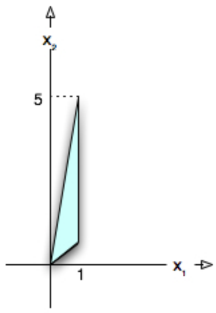
$$= \int_{[0,1]}\int_0^1 (x_1^2+x_2)\cdot 1_F(x_1,x_2)\ dx_2\ \lambda(dx_1) = \int_{[0,1]}\int_{x_1^2}^{\sqrt{x_1}} (x_1^2+x_2)\ dx_2\ \lambda(dx_1) = \int_{[0,1]} \underbrace{\left[x_1^2x_2+\frac{x_2}{2}\right]_{x_1^2}^{\sqrt{x_1}}}_{\substack{\text{stetig}\\ \text{\& beschränkt}\\ \text{auf } x_2\in[0,1]}} \lambda(dx_1)$$

$$= \int_0^1 \left[x_1^{\frac{5}{2}}+\frac{x_1}{2}-\frac{3}{2}x_1^4\right]\ dx_1 = \frac{33}{140}$$



e) Ohne explizit jeden Schritt aufzuschreiben, gehen wir analog zu vorhin vor:

$$\int_F (x_1+6x_2)\ \lambda^2(dx) = \int_0^1\int_{x_1}^{5x_1} (x_1+6x_2)\ dx_2\ dx_1 = 76\int_0^1 x_1^2\ dx_1 = \frac{76}{3}$$



Aufgabe 04

σ-Additivität

- Für $A \in \mathcal{M}_1,\ B \in \mathcal{M}_2$ definieren wir die Indikatorfunktionen

$$1_A : M_1 \to \mathbb{R}\ ,\ 1_B : M_2 \to \mathbb{R}\ ,\ 1_{A\times B} : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$$

  Dann gilt:

$$\forall\, x \in M_1 : 1_{A\times B}(x,\cdot) = 1_A(x)\cdot 1_B \tag{1}$$

  da

$$\forall\, (x,y) \in M_1 \times M_2 : 1_{A\times B}(x,y) = 1_A(x)\cdot 1_B(y)$$

- $$\int\limits_{M_2} \underbrace{1_{A\times B}(\cdot,y)}_{\substack{\text{messbar}\\ \text{da Schnittfunktion}}}\ \mu_2(dy) \overset{(1)}{=} \int\limits_{M_2} 1_A(\cdot)\cdot 1_B(y)\ \mu_2(dy) = 1_A(\cdot)\int\limits_{M_2} 1_B(y)\ \mu_2(dy) = \mu_2(B)\cdot 1_A \tag{2}$$

- $$\int\limits_{M_1} \underbrace{\left(\int\limits_{M_2} 1_{A\times B}(x,y)\ \mu_2(dy)\right)}_{\substack{\text{messbar}\\ \text{nach (2)}}}\ \mu_1(dx) \overset{(2)}{=} \int\limits_{M_1} 1_A(x)\cdot\mu_2(B)\ \mu_1(dx) = \mu_1(A)\cdot\mu_2(B) \tag{3}$$

  und analog

$$\int\limits_{M_2} \left(\int\limits_{M_1} 1_{A\times B}(x,y)\ \mu_1(dx)\right)\ \mu_2(dy) = \mu_1(A)\cdot\mu_2(B) \tag{4}$$

- Sei nun $(A_n \times B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ disjunkte Folge, mit

$$\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times B_n}_{=:A\times B} \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2\ ,\ \ A \in \mathcal{M}_1,\ B \in \mathcal{M}_2$$

  Dann gilt zunächst

$$1_{A\times B} \overset{\substack{A_n\times B_n\\ \text{disjunkt}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n\times B_n}$$

und somit

$$\int\limits_{M_2} 1_{A\times B}(x,y)\ \mu_2(dy) = \int\limits_{M_2} \sum_{k=1}^{\infty} 1_{A_k\times B_k}(x,y)\ \mu_2(dy) = \int\limits_{M_2} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k\times B_k}(x,y)}_{\substack{\mathcal{M}_2-\text{messbar}\\ \text{monoton wachsend}}}\ \mu_2(dy)$$

$$\overset{\text{B. Levi}}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{M_2} \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k\times B_k}(x,y)\ \mu_2(dy) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{M_2} 1_{A_k\times B_k}(x,y)\ \mu_2(dy) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{M_2} 1_{A_n\times B_n}(x,y)\ \mu_2(dy) \quad (*)$$

- Schließlich

$$\int\limits_{M_1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{M_2} 1_{A_k\times B_k}(x,y)\ \mu_2(dy) \right)\ \mu_1(dx) = \int\limits_{M_1} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{M_2} 1_{A_k\times B_k}(x,y)\ \mu_2(dy) \right)}_{\substack{\mathcal{M}_1-\text{messbar}\\ \text{monoton wachsend}}} \mu_1(dx)$$

$$\overset{\text{B. Levi}}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{M_1} \left(\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{M_2} 1_{A_k\times B_k}(x,y)\ \mu_2(dy) \right)\ \mu_1(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{M_1} \int\limits_{M_2} 1_{A_k\times B_k}(x,y)\ \mu_2(dy)\ \mu_1(dx)$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A_n)\cdot \mu_2(B_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_n \times B_n)$$

Somit ist μ auf $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ σ-additiv.

σ-Endlichkeit

Da die Maße μ_1, μ_2 σ-endlich sind, existieren Folgen $(A_i^n) \subset \mathcal{M}_i,\ i = 1,2$ mit

$$\mu_i(A_i^n) < \infty \quad \wedge \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i^n = M_i$$

Dann ist

$$M_1 \times M_2 = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_1^n \right) \times \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_2^m \right) = \underbrace{\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} \underbrace{A_1^n \times A_2^m}_{A_{nm}}}_{\substack{\text{abzählbar}\\ \text{viele}}}$$

$$\mu(A_{nm}) = \mu(A_1^n \times A_2^m) = \underbrace{\mu_1(A_1^n)}_{<\infty} \cdot \underbrace{\mu_2(A_2^m)}_{<\infty} < \infty$$

das heißt μ ist σ-endlich.

Fortsetzung

Betrachten die Halbalgebra

$$\mathcal{H} := \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$$

Ess ist $\mu(\emptyset) = 0$, denn aus $A_1 \times A_2 = \emptyset$ folgt $A_1 = \emptyset \ \vee\ A_2 = \emptyset$ und somit $\mu_1(A_1) = 0 \ \vee\ \mu_2(A_2) = 0$. Somit existiert eine eindeutige Fortsetzung der Mengenfunktion $\mu : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ zu einem Prämaß $\mu' : \alpha(\mathcal{H}) \to \hat{\mathbb{R}}$. Da μ auf $\mathcal{H}$ σ-endlich war, ist μ' natürlich auch σ-endlich auf $\alpha(\mathcal{H})$, da wegen

$$\mu' \mid_{\mathcal{H}} = \mu$$

die gleichen Mengen A_{nm} (wie oben definiert) verwendet werden können um dies nachzuweisen. Folglich existiert nach dem Satz von Caratheodory eine eindeutige Fortsetzung des Prämaßes $\mu' : \alpha(\mathcal{H}) \to \hat{\mathbb{R}}$ zu einem Maß $\mu'' : \sigma(\alpha(\mathcal{H})) \to \hat{\mathbb{R}}$.