Übungen zur Vorlesung
"Maß und Integral"

SS 2008

12. Serie

1. Es seien $(M_i, \mathcal{M}_i, m)$ $(i = 1, 2)$ Maßräume und f eine meßbare Funktion auf $(M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$. Der Satz von Fubini über die Vertauschung der iterierten Integrale 4 P

$$\int_{M_1} \left[\int_{M_2} f(x,y) m_2(dy) \right] m_1(dx) = \int_{M_2} \left[\int_{M_2} f(x,y) m_1(dx) \right] m_2(dy)$$

ist im allgemeinen nicht richtig, wenn man auf die Voraussetzung der σ-Endlichkeit von m_1 oder m_2 verzichtet. Diese Tatsache belege man mit einem Beispiel!
Hinweis: Man wähle $(M_i, \mathcal{M}_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $(i = 1, 2)$ und als f die Indikatorfunktion der Diagonalen D in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Man zeige, daß D zu $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gehört. Man suche nun Maße m_1 und m_2 auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so daß die obige Gleicheit nicht erfüllt ist.

2. Es sei die Funktion f definiert durch

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\ , \ (x,y) \in (0,1]^2.$$

4 P

(a) Man überzeuge sich davon, dass die iterierten Integrale

$$\int_{(0,1]} \left[\int_{(0,1]} f(x,y) \lambda(dy) \right] \lambda(dx) \quad \text{und} \quad \int_{(0,1]} \left[\int_{(0,1]} f(x,y) \lambda(dx) \right] \lambda(dy)$$

die (verschiedenen) Werte $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{-\pi}{4}$ besitzen.

(b) Wie ist das Ergebnis mit der Gültigkeit des Satzes von Fubini in Einklang zu bringen? Man gebe dafür einen Beweis!

3. Mit Hilfe des Satzes von Fubini berechne man die folgenden Integrale. Dabei vereinbaren wir die Bezeichnungen $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $dx = \lambda^2(dx)$.

(a)

$$\int_{[3,4]\times[1,2]} \frac{1}{(x_1 + x_2)^2} \quad dx;$$

2 P

(b)

$$\int_{[0,1]^2} \frac{x^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \quad dx;$$

2 P

(c)

$$\int_{\{x_1^2+x_2^2<R\}} x_2^2\sqrt{r-x_1^2} \quad dx,\ \ R>0 \ \text{ sei eine Zahl;}$$

2 P

(d)

$$\int_F (x_1^2+x_2) \quad dx$$

wobei F der Teil der Ebene ist, der von den Parabeln $x_1 = x_2^2$ und $x_2 = x_1^2$ eingeschlossen ist; 2 P

(e)

$$\int_F (x_1+6x_2) \quad dx,$$

wobei F das Dreieck mit den Koordinaten $(0,0),(1,1),(1,5)$ für die Eckpunkte ist. 2 P

4*. Es seien $(M_1, \mathcal{M}_1, m_1)$ und $(M_2, \mathcal{M}_2, m_2)$ σ-endliche Maßräume. Man zeige, daß der Ansatz 4 P

$$m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)\cdot m_2(A_2)\ ,\ A_1 \times A_2 \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2,$$

zu einer σ-additiven und σ-endlichen Mengenfunktion m auf der Halbalgebra $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ führt. Unter Ausnutzung von Resultaten der Vorlesung beweise man schließlich, daß m eine eindeutige Fortsetzung zu einem Maß auf $(M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$ zuläßt. (Das ist ein alternativer Zugang zur Einführung des Produktmaßes).

Abgabe: 1. Gruppe: Montag, 7. Juli 2008, zur Übungszeit
2. Gruppe: Dienstag, 8. Juli 2008, zur Übungszeit

---

* Zusatzpunkte, 14 Punkte entsprechen 100%