Maß & Integrationstheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 11 - Lösungen

Stilianos Louca

20. Juli 2008

Hilfsaussage 1

Für Indexmengen $I_i,\ i=1,..,n$ und Mengen $E_{ik},\ i=1,..,n,\ k\in I_i$ gilt:

$$\bigcup_{\vec{k}\in I_1\times..\times I_n} E_{1k_1}\times\cdots\times E_{nk_n} = \left(\bigcup_{k_1\in I_1} E_{1k_1}\right)\times\cdots\times\left(\bigcup_{k_n\in I_n} E_{nk_n}\right)$$

Beweis:

$$\bigcup_{\vec{k}\in I_1\times..\times I_n} E_{1k_1}\times\cdots\times E_{nk_n} = \{(x_1,..,x_n) : x_i\in E_{ik_i},\ k_i\in\mathbb{N},\ i=1,..,n\}$$

$$= \{(x_1,..,x_n) : k_i\in\mathbb{N},\ i=1,..,n,\ x_i\in E_{ik_i}\} = \left(\bigcup_{k_1\in I_1} E_{1k_1}\right)\times\cdots\times\left(\bigcup_{k_n\in I_n} E_{nk_n}\right)$$

Hilfsaussage 2

Für Mengen-Folgen $(E_{ik})_{k\in\mathbb{N}},\ i=1,..,n$ gilt:

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_{1k}\times\cdots\times E_{nk} = \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_{1k}\right)\times\cdots\times\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_{nk}\right)$$

Beweis:

$$\left(\bigcap_{k_1\in\mathbb{N}} E_{1k_1}\right)\times\cdots\times\left(\bigcap_{k_n\in\mathbb{N}} E_{nk_n}\right) = \{(x_1,..,x_n) : x_i\in E_{ik_i}\ \forall\ k_i\in\mathbb{N},\ i=1,..,n\}$$

$$= \{(x_1,..,x_n) : x_i\in E_{ik}\ \forall\ k\in\mathbb{N},\ i=1,..,n\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_{1k}\times\cdots\times E_{nk}$$

Bemerke: Insbesondere für endlich viele $(E_{ik})_{k=1}^m,\ i=1,..,n$ ist

$$\bigcap_{k=1}^m E_{1k}\times\cdots\times E_{nk} = \left(\bigcap_{k=1}^m E_{1k}\right)\times\cdots\times\left(\bigcap_{k=1}^m E_{nk}\right)$$

(restlichen *Folgenglieder* durch die jeweilige Grundmenge ersetzen).

Aufgabe 01

Nennen $\mathcal{M} := \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$. $\mathcal{M}$ ist tatsächlich eine Halbalgebra über M denn:

(i) Wegen $M_i \in \mathcal{M}_i$ ist auch $M = M_1 \times M_2 \in \mathcal{M}$

(ii) Für $A = A_1 \times A_2, B = B_1 \times B_2 \in \mathcal{M},\ A_i, B_i \in \mathcal{M}_i$ ist auch

$$A \cap B \overset{\text{Hilfsaussage 2}}{=} \underbrace{(A_1 \cap B_1)}_{\in \mathcal{M}_1} \times \underbrace{(A_2 \cap B_2)}_{\in \mathcal{M}_2} \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$$

(iii) Für $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{M},\ A_i \in \mathcal{M}_i$ ist

$$A^c = \{(x,y) : x \notin A_1 \ \vee \ y \notin A_2\} = \{(x,y) : (x \notin A_1 \ \wedge \ y \in A_2) \vee (x \in A_1 \ \wedge \ y \notin A_2) \vee (x \notin A_1 \ \wedge \ y \notin A_2)\}$$

$$= \{(x,y) : x \notin A_1,\ y \in A_2\} \overset{+}{\cup} \{(x,y) : x \in A_1,\ y \notin A_2\} \overset{+}{\cup} \{(x,y) : x \notin A_1,\ y \notin A_2\}$$

$$= \underbrace{(\underbrace{A_1^c}_{\in \mathcal{M}_1} \times A_2)}_{\in \mathcal{M}} \overset{+}{\cup} \underbrace{(A_1 \times \underbrace{A_2^c}_{\in \mathcal{M}_2})}_{\in \mathcal{M}} \overset{+}{\cup} \underbrace{(A_1^c \times A_2^c)}_{\in \mathcal{M}}$$

□

Aufgabe 02

Sei $\mathcal{M} := \mathcal{M}_1 \times \cdots \times \mathcal{M}_n$ und $\mathscr{S}$ eine beliebige σ-Algebra über M, bezüglich der die Abbildungen X_i messbar sind. Betrachten wir X_i, so muss definitionsgemäß gelten:

$$\forall\ A \in \mathcal{M}_i : X_i^{-1}(A) \in \mathscr{S}$$

also per Konstruktion der X_i:

$$X_i^{-1}(A) = M_1 \times \cdots \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stelle i}}}{A} \times \cdots \times M_n \in \mathscr{S} \quad \forall\ A \in \mathcal{M}_i\ ,\ \forall\ i = 1, .., n$$

Da $\mathscr{S}$ eine σ-Algebra ist, muss für $A_i \in \mathcal{M}_i,\ i = 1, .., n$ gelten:

$$X_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(A_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ M_1 \times \cdots \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stelle i}}}{A} \times \cdots \times M_n \right\}$$

$$\overset{\text{Hilfsaussage 02}}{=} \underbrace{[A_1 \cap M_1 \cap \ldots M_1]}_{A_1} \times \underbrace{[M_2 \cap A_2 \cap M_2 \cap \ldots M_2]}_{A_2} \times \cdots \times \underbrace{[M_n \cap \cdots \cap M_n \cap A_n]}_{A_n}$$

$$= A_1 \times \cdots \times A_n \in \mathscr{S}$$

das heißt $\mathcal{M} \subset \mathscr{S}$ und somit $\sigma(\mathcal{M}) \overset{\mathscr{S}\ \sigma-\text{Algebra}}{\subset} \mathscr{S}$.
Andererseits ist für jedes $A \in \mathcal{M}_i$

$$X_i^{-1}(A) = \underbrace{M_1}_{\in \mathcal{M}_1} \times \cdots \times \underbrace{A}_{\in \mathcal{M}_i} \times \cdots \times \underbrace{M_n}_{\in \mathcal{M}_n} \in \underbrace{\bigtimes_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i}_{\mathcal{M}} \subset \sigma(\mathcal{M})$$

das heißt die X_i sind über $(M, \sigma(\mathcal{M}))$ messbar.
Somit ist $\sigma(\mathcal{M})$ die kleinste σ-Algebra bezüglich der die Abbildungen X_i messbar sind. □

Aufgabe 03

Zeigen: $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Sei $\mathcal{O}$ die Menge aller offenen Mengen in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Aus Aufgabe 02 wissen wir: $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{B}(\mathbb{R})$ ist kleinste σ-Algebra bzgl. der die Projektoren $X_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar sind. Zu zeigen wäre also:

$$\sigma(X_1, .., X_n) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$$

Dabei ist

$$\sigma(X_1, .., X_n) = \sigma\left(X_i^{-1}(B_i) : B_i \in \mathcal{O},\ i = 1, .., n\right)$$

denn es ist X_i messbar bzgl. $\sigma(X_1, .., X_n)$ genau dann wenn $X_i^{-1}(B_i) \in \sigma(X_1, .., X_n)\ \forall\ B_i \in \mathcal{O}$ und $\mathcal{O}$ ist Erzeugendensystem von $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.
Zu zeigen wäre also: $\forall\ i \in \{1, .., n\}\ \forall\ B_i \in \mathcal{O}$:

$$X_i^{-1}(B_i) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$$

denn dann folgt

$$\sigma\left(X_i^{-1}(B_i) : B_i \in \mathcal{O},\ i = 1, .., n\right) \subset \sigma(\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$$

Die Projektion X_i ist stetig von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ nach $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, das heißt das Urbild X_i^{-1} der offenen Menge B_i ist offen in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ und somit $X_i^{-1}(B_i) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Demnach ist

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$$

Zeigen: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, das heißt für $x = (x_1, .., x_n) \in G$:

$$\exists\ \varepsilon : B_\varepsilon(x) \subset G$$

Weiter existiert für jedes x_i ein $r(x_i) \in \mathbb{Q},\ \delta \in \mathbb{Q}$ mit $2\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, so dass

$$|r(x_i) - x_i| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$$

gilt, also

$$(x_1, .., x_n) \in \bigtimes_{i=1}^{n} [r(x_i) - \delta, r(x_i) + \delta]$$

Doch es ist

$$K(p_x, q_x) := \bigtimes_{i=1}^{n} [r(x_i) - \delta, r(x_i) + \delta] \subset B_\varepsilon(x)$$

denn für $y \in K(p_x, q_x)$ ist

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (2\delta)^2} \leq \varepsilon$$

das heißt $\forall\ x \in G : \exists\ p(x_i) < q(x_i) \in \mathbb{Q}$ so dass

$$\bigtimes_{i=1}^{n} (p(x_i), q(x_i)) = K(p_x, q_x) \subset G$$

und

$$G \subset \bigcup_{x \in G} K(p_x, q_x)$$

Doch da nur abzählbar viele $K(p_x, q_x)$ existieren können (da $\mathbb{Q}$ abzählbar) ist G Vereinigung offener Mengen, da für jede dieser Mengen gilt:

$$K(p_x, q_x) = \underbrace{\bigtimes_{i=1}^{n} \underbrace{(p(x_i), q(x_i))}_{\text{offen}}}_{\substack{\text{offen} \\ \text{da Kartesisches Produkt} \\ \text{offener Intervalle}}} \quad \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$$

Somit:

$$G = \underbrace{\bigcup_{k \in G} K(p_x, q_x)}_{\substack{\text{abzählbar} \\ \text{viele}}} \in \underbrace{\sigma\left(\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathscr{B}(\mathbb{R})\right)}_{\bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{B}(\mathbb{R})}$$

also

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\left(\{G : G \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}\}\right) \subset \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

Aufgabe 04

- Nennen
$$\mathcal{E} := \{E_1 \times \cdots \times E_n : E_i \in \mathcal{E}_i,\ i = 1, .., n\}\ ,\ M := M_1 \times \cdots \times M_n$$
Wegen $(E_{ik})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_i \subset \mathcal{M}_i$ ist
$$\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_1 \times \cdots \times \mathcal{M}_n$$
und somit
$$\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma\left(\mathcal{M}_1 \times \cdots \times \mathcal{M}_n\right) = \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$$
- Zum anderen sind die Abbildungen $X_i : M \to M_i$ definiert in Aufgabe 02 über $\sigma(\mathcal{E})$ messbar, denn:
Laut Aufgabe 02 gilt für eine Menge $E_i \in \mathcal{E}_i \subset \mathscr{P}(M_i)$:
$$X_i^{-1}(E_i) = M_1 \times \cdots \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stelle i}}}{E_i} \times \cdots \times M_n$$
Wegen $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{jk} = M_j\ ,\ E_{jk} \in \mathcal{E}_i$ gilt
$$\underbrace{\bigcup_{\vec{k} \in \mathbb{N}^n} \underbrace{E_{1k_1} \times \cdots \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stelle i}}}{E_i} \times \cdots \times E_{nk_n}}_{\in \mathcal{E}}}_{\substack{\in \sigma(\mathcal{E}) \\ \text{da } \mathbb{N}^n \text{ abzählbar}}} \overset{\text{Hilfsaussage 1}}{=} \underbrace{\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{1k}\right)}_{M_1} \times \cdots \times E_i \times \ldots \underbrace{\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{nk}\right)}_{M_n}$$
$$= M_1 \times \cdots \times E_i \times \cdots \times M_n = X_i^{-1}(E_i)$$
das heißt
$$X_i^{-1}(E_i) \in \sigma(\mathcal{E}) \quad \forall\ i, E_i \in \mathcal{E}_i$$
Da die $\mathcal{E}_i$ Erzeugendensysteme für $\mathcal{M}_i$ sind, gilt sogar
$$X_i^{-1}(E_i) \in \sigma(\mathcal{E}) \quad \forall\ i, E_i \in \mathcal{M}_i$$
das heißt die X_i sind messbar von $(M, \sigma(\mathcal{E}))$ nach $(M_i, \mathcal{M}_i)$.
- Laut Aufgabe 02 muss dann
$$\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n \subset \sigma(\mathcal{E})$$
und somit
$$\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n = \sigma(\mathcal{E})$$
sein.

□