Maß & Integrationstheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 10 - Lösungen

Stilianos Louca

30. Juni 2008

Aufgabe 01

a) Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein endliches Intervall mit $b > a$. Dann ist D an jedem Punkt $x \in I$ unstetig, denn:

- Die Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind beide dicht in $\mathbb{R}$.
- Ist $x \in \mathbb{Q}$ so gibt es eine Folge $(x_n) \subset I \setminus \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$ und somit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 \neq 1 = f(x)$.
- Ist $x \notin \mathbb{Q}$ so gibt es eine Folge $(x_n) \subset I \cap \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$ und somit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = f(x)$.

Für jede Menge $N \in \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$ mit f stetig in $I \cap N^c$ gilt somit

$$I \cap N^c = \emptyset \ \to \ I \subset N \ \to \ \lambda(N) \geq \lambda(I) = b - a \neq 0$$

Somit ist f **nicht** λ-fast überall stetig. Da D beschränkt ist, ist D nicht $\mathcal{R}$-integrierbar.

b) Die Funktion D ist messbar, denn:

- Für jeden Punkt $r \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ liegt bekanntlich $\{r\}$ in $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.
- Somit ist auch
$$\mathbb{Q} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{r\}$$
als abzählbare Vereinigung von Borelmengen auch wieder in $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.
- Wegen $\mathbb{R} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ ist auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
- Somit gilt für beliebige Menge $A \subset \mathbb{R}$:
$$D^{-1}(A) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & : \{0,1\} \subset A \\ \mathbb{Q} & : \{0\} \notin A \ \wedge \ \{1\} \in A \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & : \{0\} \in A \ \wedge \ \{1\} \notin A \\ \emptyset & : \text{sonst} \end{array} \right\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

Da sie außerdem nicht-negativ ist, existiert auf jeden Fall das Integral.
Es gilt die Darstellung
$$D = 1 \cdot 1_{\mathbb{Q}} + 0 \cdot 1_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \ , \ \ \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$
das heißt D ist nicht negativ, einfach, so dass gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} D \, d\lambda = 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q}) + 0 \cdot \lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \lambda\left(\biguplus_{r\in\mathbb{Q}} \{r\} \right) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \underbrace{\lambda(\{r\})}_{0} = 0 < \infty$$

das heißt insbesondere D ist integrierbar.

c) Siehe Teil (b).

Aufgabe 02

Betrachten den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$ mit dem Zählmaß μ.

a) Definieren die Funktionen $f^n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$f^n(k) := a_k^n$$

Diese sind nicht negativ (da $a_k^{(n)} \geq 0$) und messbar, denn

$$f^{-1}(A) \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) \quad \text{für} \quad A \subset \mathbb{R}$$

Somit existiert das Integral $\int\limits_{\mathbb{N}} f^n \, d\mu$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und ist nach Übungsserie 09 gegeben durch

$$\int\limits_{\mathbb{N}} f^n \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f^n(k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n$$

Nach Voraussetzung an die a_k^n ist die Folge f^n monoton wachsend. Definieren wir ferner die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gemäß

$$f(k) := \lim_{n\to\infty} f^n(k) = \lim_{n\to\infty} a_k^n = a_k$$

so konvergieren die f^n punktweise definitionsgemäß, monoton wachsend gegen f. Analog zu vorhin, ist auch hier f nicht negativ messbar und es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Demnach gilt nach dem Satz von Levi:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{N}} f^n \, d\mu \overset{\text{Levi}}{=} \int\limits_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \square$$

b) Die f^n seien definiert wie in Teil (a). Dann sind sie stets nicht negative, messbare Funktionen, mit

$$\int\limits_{\mathbb{N}} f^n \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n$$

Setzen wir ferner

$$f := \liminf_{n\to\infty} f^n \quad \to \quad f(k) = \liminf_{n\to\infty} a_k^n$$

so ist f nicht negativ (da Infimum (und somit Grenzwert von Infima) nicht negativer Zahlen auch nicht negativ ist), messbar, so dass analog zu vorhin gilt

$$\int\limits_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} a_k^n$$

Somit folgt mit dem Lemma von Fatou:

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n = \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{N}} f^n \, d\mu \overset{\text{Fatou}}{\geq} \int\limits_{\mathbb{N}} \underbrace{\liminf_{n\to\infty} f^n}_{f} \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} a_k^n \quad \square$$

c) Die Funktionen f^n seien wie in Teil (a) definiert. Dann sind sie nach Voraussetzung an die a_k^n überall (punktweise) konvergent und natürlich stets messbar. Definieren deshalb

$$f := \lim_{n\to\infty} f^n \quad \to \quad f(k) = \lim_{n\to\infty} f^n(k) = \lim_{n\to\infty} a_k^n = a_k$$

und

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ , \ g(k) := b_k$$

Dann ist g (nach Voraussetzung an die b_n) nicht negativ messbar. Nach Übungsserie 09 existiert also das Integral $\int\limits_{\mathbb{N}} g \; d\mu$ und ist gegeben durch

$$\int\limits_{\mathbb{N}} g \; d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$$

das heißt g ist integrierbar. Nach Aufgabenstellung gilt außerdem $|f^n(k)| \leq g(k) \; \forall \; k, n \geq 1$ also $|f^n| \leq g \; \forall \; n$. Nach dem Satz von Lebesque über majorisierte Konvergenz gilt somit: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{N}} f^n \; d\mu$ existiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{N}} f^n \; d\mu \overset{\text{Lebesque}}{=} \int\limits_{\mathbb{N}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} f^n}_{f} \; d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \square$$

Aufgabe 03

Betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f \equiv 0$. Seien die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$f_n(x) := \frac{1}{2n} \cdot 1_{[-n,n]}$$

Dann sind die f_n natürlich (nicht negativ) messbar, denn $[-n, n] \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und deren Integral ergibt sich als

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_n \; d\lambda = \frac{1}{2n} \underbrace{\lambda([-n, n])}_{2n} = 1 < \infty$$

Ferner konvergieren diese Punktweise gegen $f = 0$, denn für $x \in \mathbb{R}, \; \varepsilon > 0$ ist für genügend große n

$$n \geq |x| \;\wedge\; f_n(x) = \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

Doch es ist

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n \; d\lambda = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = \int\limits_{\mathbb{R}} f \; d\lambda$$

Aufgabe 04

Sei f messbar auf $(M, \mathcal{M})$ und $(f_n^+), (f_n^-)$ Folgen einfacher, nicht negativer, monoton wachsender Funktionen die jeweils gegen f^+ und f^- konvergieren:

$$f_n^+ = \sum_{k=1}^{N_n} a_{nk} \cdot 1_{A_{nk}} \;,\; f_n^- = \sum_{k=1}^{M_n} b_{nk} \cdot 1_{B_{nk}} \;,\; A_{nk} \cap A_{nl} = \emptyset = B_{nk} \cap B_{nl} \text{ für } n \neq l \;,\; A_{nk}, B_{nk} \in \mathcal{M}$$

Dann ist definitionsgemäß

$$\int\limits_M f^+ \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_M f_n^+ \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} a_{nk} \mu(A_{nk}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} a_{nk} \sum_{l=1}^{\infty} \mu_l(A_{nk})$$

$$\overset{\substack{\text{alles}\\\text{nicht}\\\text{negativ}}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} a_{nk} \mu_l(A_{nk})}_{\substack{\text{existiert immer}\\\text{da Partialsummen}\\\text{monoton wachsend}\\\text{und } a_{nk} \geq 0}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{N_n} a_{nk} \mu_l(A_{nk})}_{\int\limits_M f_n^+ \; d\mu_l}$$

Setzen wir $a_l^n := \int\limits_N f_n^+ \, d\mu_l$ so gilt wegen der Monotonie des Integrals und der Folge (f_n^+): $0 \leq a_l^n \leq a_l^{n+1}$. Durch Aufgabe 02 (a) folgt dann

$$\int\limits_M f^+ \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_M f_n^+ \, \mu_l = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_l^n \overset{2.a}{=} \sum_{l=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_l^n = \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_M f^+ \, d\mu_l$$

Analog zeigt sich:

$$\int\limits_M f^- \, d\mu = \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_M f^- \, d\mu_l$$

Betrachten wir die Folgen

$$I_l^+ := \int\limits_M f^+ \, d\mu_l \ , \ I_l^- := \int\limits_M f^- \, d\mu_l$$

so existiert das Integral $\int\limits_M f \, d\mu$ genau dann wenn mindestens eine der beiden Reihen $\sum\limits_{l=1}^{\infty} I_l^+$, $\sum\limits_{l=1}^{\infty} I_l^-$ endlich bleibt. In dem Falle ist

$$\int\limits_M f \, d\mu = \int\limits_M f^+ \, d\mu - \int\limits_M f^- \, d\mu = \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_M f^+ \, d\mu_l - \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_M f^- \, d\mu_l \overset{*}{=} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\int\limits_M f^+ \, d\mu_l - \int\limits_M f^- \, d\mu_l \right] = \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_M f \, d\mu_l$$

(*) Da eine der beiden Reihen absolut konvergent.

f ist genau dann Integrierbar, wenn $\int\limits_M |f| \, d\mu$ endlich ist. Analog zu vorhin ist

$$\int\limits_M |f| \, d\mu \overset{|f|\geq 0}{=} \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_M |f| \, d\mu_l$$

das heißt f ist genau dann über μ Integrierbar wenn sie jeweils über μ_l integrierbar ist, und die Reihe

$$\sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_M |f| \, d\mu_l$$

endlich ist. In dem Fall ist

$$\int\limits_M f \, d\mu = \sum_{l=1}^{\infty} \left[\int\limits_M f^+ \, d\mu_l - \int\limits_M f^- \, d\mu_l \right] = \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_M f \, d\mu_l$$