Übungen zur Vorlesung
"Maß und Integral"

SS 2008

10. Serie

1. Die Dirichlet-Funktion D ist definiert auf R gemäß 3 P

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \textit{ rational}, \\ \\ 0, & x \textit{ irrational}. \end{cases}$$

   (a) Man zeige, daß D in keinem endlichen Intervall Riemann-integrierbar ist und somit auch auf $\mathbb{R}$ nicht Riemann-integrierbar ist.

   (b) Man zeige, daß D Lebesgue-integrierbar ist.

   (c) Man berechne das Lebesgue-Integral von D.

2. Für jedes $n \geq 1$ sei $(a_k^{(n)})_{k\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen. Man beweise die folgenden Aussagen:

   (a) Falls gilt

$$0 \leq a_k^{(n)} \leq a_k^{(n+1)}, \; k, n \geq 1,$$

   und 2 P

$$a_k = \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}, \; k \geq 1,$$

   so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

   (b) Ist die Folge $(a_k^{(n)})_{k\geq 1}$ für jedes n nichtnegativ, so gilt 2 P

$$\sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} a_k^{(n)} \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)}.$$

   (c) Es gelte 2 P

$$\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = a_k \; , \; k \geq 1,$$

   und es existiere eine Folge reeller Zahlen $(b_k)_{k\geq 1}$ mit

$$|a_k^{(n)}| \leq b_k, \; k, n \geq 1, \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty.$$

Dann folgt die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

3. Man gebe ein Beispiel eines Maßraumes $(M, \mathcal{M}, m)$ sowie einer Folge (f_n) meßbarer Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert, so daß f_n und f integrierbare Funktionen sind, aber nicht 3 P

$$\lim_{n\to\infty}\int_M f_n dm = \int_M f dm$$

gilt.

4.* Es sei (m_n) eine Folge von Maßen auf dem meßbaren Raum $(M, \mathcal{M})$ und $m = \sum_{n=1}^{\infty} m_n$. Für meßbare Funktionen f auf $(M, \mathcal{M})$ untersuche man die Existenz des Integrals $\int_M f dm$ und die Integrierbarkeit von f bezüglich m. Man berechne $\int_M f dm$. 4 P

Abgabe: 1. Gruppe: Montag, 23. Juni 2008, zur Übungszeit
2. Gruppe: Dienstag, 24. Juni 2008, zur Übungszeit

---

* Zusatzpunkte