Maß & Integrationstheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 09 - Lösungen

Stilianos Louca

23. Juni 2008

Aufgabe 01

a) Es sei f messbar über $(M, \mathcal{M})$. Dann ist $A_0 := f^{-1}(\{f(x_0)\}) \in \mathcal{M}$ und somit:

$$f = \underbrace{f \cdot 1_{A_0}}_{f(x_0)\cdot 1_{A_0}} + f \cdot 1_{M\setminus A_0}$$

wobei $f \cdot 1_{M\setminus A_0}$ und $f \cdot 1_{A_0}$ als Produkte messbarer Funktionen auch messbar sind. Somit existiert eine monoton wachsende Folge

$$g_n \uparrow \left(f \cdot 1_{M\setminus A_0}\right)^+ \quad , \quad g_n = \sum_{i=1}^{k_n} g_{ni} \cdot 1_{A_{ni}} \quad , \quad A_{ni} \in \mathcal{M}$$

positiver, einfacher Funktionen, mit $g_{ni} = 0 \ \forall \ A_{ni} \ni \{x_0\}$, da $g_n \leq \left(f \cdot 1_{A\setminus A_0}\right)^+$ und $\left(f \cdot 1_{M\setminus A_0}\right)^+(x_0) = 0$ ist, so dass gilt:

$$\int\limits_M \left(f \cdot 1_{M\setminus A_0}\right)^+ \, d\delta_{x_0} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_M g_n \, d\delta_{x_0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \underbrace{\underbrace{g_{ni}}_{\substack{0 \\ \text{für } x_0 \in A_{ni}}} \cdot \underbrace{\delta_{x_0}(A_{ni})}_{\substack{0 \\ \text{für } x_0 \notin A_{ni}}}}_{0} = 0$$

Analog ist auch

$$\int_M \left(f \cdot 1_{M\setminus A_0}\right)^- \, d\delta_{x_0} = 0$$

so dass

$$\int\limits_M f \cdot 1_{M\setminus A_0} \, d\delta_{x_0} = 0$$

ist. Außerdem ist $f \cdot 1_{A_0} = f(x_0) \cdot 1_{A_0}$ entweder 0 oder konstant, das heißt das Integral $\int\limits_M f \cdot 1_{A_0} \, d\delta_{x_0}$ existiert, da entweder $(f \cdot 1_{A_0})^+ = 0$ oder $(f \cdot 1_{A_0})^- = 0$ ist. Da die Integrale für sowohl $f \cdot 1_{A_0}$ als auch für $f \cdot 1_{M\setminus A_0}$ existieren, und der Ausdruck

$$\int\limits_M f \cdot 1_{A_0} \, d\delta_{x_0} + \underbrace{\int\limits_M f \cdot 1_{M\setminus A_0} \, d\delta_{x_0}}_{0}$$

natürlich sinnvoll ist, existiert auch das Integral

$$\int\limits_M \left(f \cdot 1_{A_0} + f \cdot 1_{M\setminus A_0}\right) \, d\delta_{x_0} = \int\limits_M f \, d\delta_{x_0}$$

b) Nach obigen Überlegungen ergibt sich

$$\int\limits_M f\ d\delta_{x_0} = \int\limits_M f \cdot 1_{A_0}\ d\delta_0 = f(x_0) \cdot \int\limits_M 1_{A_0}\ d\delta_{x_0} = f(x_0) \cdot \underbrace{\delta_{x_0}(1_{A_0})}_{\substack{1 \\ \text{da } x_0 \in A_0}} = f(x_0)$$

c) Definitionsgemäß ist f genau dann bezüglich δ_{x_0} Integrierbar, wenn $\int\limits_M f\ d\delta_{x_0}$ endlich ist, also $f(x_0)$ endlich ist.

Aufgabe 02

Hilfsaussage: Zu nicht-negativer, messbarer Funktion $f : \mathbb{N} \to \hat{\mathbb{R}}$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 1_{\{n\}}\ ,\ a_n \geq 0$$

ist

$$\int\limits_{\mathbb{N}} f\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Beweis: Definieren die Folge (f_n) einfacher, monoton wachsender Funktionen

$$f_n : \mathbb{N} \to \hat{\mathbb{R}}\ ,\ f_n(k) := \begin{cases} a_k & : k \leq n \\ 0 & : k > n \end{cases} \quad \to \quad f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 1_{\{k\}}$$

Diese sind natürlich messbar und konvergieren von unten gegen f, so dass folgt

$$\int\limits_{\mathbb{N}} f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{N}} f_n\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \underbrace{\mu(\{k\})}_{1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \square$$

a) Da f darstellbar ist als

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) \cdot 1_{\{n\}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot 1_{\{n\}}$$

ist

$$f^+ = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ a_n \geq 0}} a_n \cdot 1_{\{n\}} \quad , \quad f^- = -\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ a_n < 0}} a_n \cdot 1_{\{n\}}$$

und somit nach obiger Hilfsaussage

$$\int\limits_{\mathbb{N}} f^+\ d\mu = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ a_n \geq 0}} a_n \quad , \quad \int\limits_{\mathbb{N}} f^-\ d\mu = -\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ a_n < 0}} a_n$$

Somit existiert das Integral über f genau dann wenn entweder $\sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ a_n \geq 0}} a_n < \infty$ oder $\sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ a_n < 0}} a_n < \infty$ ist.

b) Aus obiger Überlegung folgt sofort

$$\int\limits_{\mathbb{N}} f\ d\mu = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ a_n \geq 0}} a_n - \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ a_n < 0}} a_n$$

c) f ist bezüglich μ genau dann Integrierbar wenn $\int\limits_{\mathbb{N}} |f|\ d\mu < \infty$ ist, das heißt wenn die Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ absolut konvergent ist, also

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty$$

Aufgabe 03

a) Sei $A \in \mathcal{M}^\mu$. Dann existieren $A_1 \subset A \subset A_2,\ A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ mit $\mu(A_1 \triangle A_2) = 0$. Setzen wir $B := A_1, N := A \setminus A_1$ so ist

$$A = A_1 \cup (A \setminus A_1) = B \cup N$$

und

$$N = A \setminus A_1 \overset{A \subset A_2}{\subset} \underbrace{A_2 \setminus A_1}_{\in \mathcal{M}},\ \mu(A_2 \setminus A_1) = \mu(A_2 \triangle A_1) = 0$$

Sei nun $B_1 \in \mathcal{M}$ und N eine μ-Nullmenge, das heißt es existiert eine menge $B_2 \in \mathcal{M}$ mit $N \subset B_2$ und $\mu(B_2) = 0$. Dann ist

$$B_1 \subset \underbrace{B_1 \cup N}_{=:A} \overset{N \subset B_2}{\subset} \underbrace{B_1 \cup B_2}_{\in \mathcal{M}}$$

und

$$\mu\left(B_1 \triangle (B_1 \cup B_2)\right) = \mu\left(B_2\right) = 0$$

das heißt $A = B_1 \cup N \in \mathcal{M}^\mu$. $\square$

b) In Übungsserie 05 wurde gezeigt: $\mathcal{M}^\mu$ ist eine σ-Algebra.

Zeigen $\mathcal{M}^\mu$ enthält $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$

Wegen $A \subset A \subset A$ und $\mu(A \triangle A) = \mu(\emptyset) = 0$ ist klar das für $A \in \mathcal{M}$ auch $A \in \mathcal{M}^\mu$ ist, das heißt es ist $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^\mu$. Für $N \in \mathcal{N}$ existiert definitionsgemäß eine Menge $B \in \mathcal{M}$ mit $N \subset B$ und $\mu(B) = 0$. Doch in Übungsserie 05 wurde gezeigt: $\mathcal{M}^\mu$ ist vollständig, das heißt insbesondere $N \subset B$ ist auch in $\mathcal{M}$. Somit ist $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}^\mu$.

Zeigen: $\mathcal{M}^\mu$ ist kleinste σ-Algebra die $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ enthält

Sei $\mathscr{M}$ eine σ Algebra die $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ enthält. Zu zeigen wäre: $\mathcal{M}^\mu \subset \mathscr{M}$.
Für beliebiges $A \in \mathcal{M}^\mu$ existieren nach Teil (a) $B \in \mathcal{M} \subset \mathscr{M},\ N \in \mathcal{N} \subset \mathscr{M}$ mit $A = B \cup N$. Doch da $\mathscr{M}$ eine σ-Algebra ist, muss auch $B \cup N \in \mathscr{M}$ liegen, also ist $\mathcal{M}^\mu \subset \mathscr{M}$. $\square$

Aufgabe 04

Richtung "$\Leftarrow$"

Es seien $f_1 \leq f \leq f_2,\ f : M \to \hat{\mathbb{R}}$ mit $f_1, f_2 : (M, \mathcal{M}) \to (\hat{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\hat{\mathbb{R}}))$ messbar und $\mu\left(\{f_1 \neq f_2\}\right) = 0$. Dann gilt für beliebiges $r \in \mathbb{R}$:

$$V_1 := f_2^{-1}([-\infty, r)) \subset \underbrace{f^{-1}([-\infty, r))}_{U_r} \subset f_1^{-1}([-\infty, r)) =: V_2$$

und da f_1, f_2 messbar über $(M, \mathcal{M})$ sind, sind $V_1, V_2 \in \mathcal{M}$. Ferner gilt

$$\mu(V_1 \triangle V_2) = \mu(V_2 \setminus V_1) = \mu\left(\{f_1 < r \ \wedge \ f_2 > r\}\right) \leq \mu\left(\{f_1 < r \ \wedge \ f_1 \neq f_2\}\right) \leq \mu\left(\{f_1 \neq f_2\}\right) = 0$$

Somit ist $U_r \in \mathcal{M}^\mu$, das heißt f ist über $(M, \mathcal{M}^\mu)$ messbar.

Richtung "$\Rightarrow$"

Es sei $f : M \to \hat{\mathbb{R}}$ messbar über $(M, \mathcal{M}^\mu)$.

Fall: f ist nicht-negative, einfach Funktion

f habe die Darstellung

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 1_{A_k} \ , \ \bigcup_{k=1}^{n} A_k = M$$

wobei die $A_k \subset \mathcal{M}^\mu$ paarweise disjunkt seien. Dann existieren $B_k, C_k \in \mathcal{M}$ mit $C_k \subset A_k \subset B_k$ und $\mu(B_k \setminus C_k) = 0$. Setzen wir

$$f_1 := \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 1_{C_k} \ , \ f_2 := \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 1_{B_k}$$

so gilt:

- $f_1 \leq f$.
  Beweis: Für $x \in M$ gilt entweder $x \in C_k$ für geeignetes k also $f_1(x) = a_k = f(x)$ oder $x \notin C_k \ \forall \ k = 1, .., n$ und somit $f_1(x) = 0 \leq f(x)$.
- $f \leq f_2$.
  Beweis: Für $x \in M$ existiert ein k mit $x \in A_k \ \rightarrow \ x \in B_k$ und somit

$$f_2(x) = a_k + \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_k \cdot 1_{B_i}}_{\geq 0} \geq f(x)$$

- $\mu\left(\{f_1 \neq f_2\}\right) = 0$.
  Beweis: Aus $f_1(x) \neq f_2(x)$ folgt: $\exists \ B_k : x \in B_k, \ x \notin C_k$ und somit

$$x \in \bigcup_{k=1}^{n} B_k \setminus C_k \ \Rightarrow \ \mu\left(\{f_1 \neq f_2\}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mu(B_k \setminus C_k)}_{0} = 0$$

- f_1, f_2 sind messbar über $(M, \mathcal{M})$ da Linearkombinationen von $\mathcal{M}$ messbaren Indikatorfunktionen.

Somit ist die Behauptung für nicht-negative, einfache Funktionen gezeigt.

Fall: f nicht-negative $\mathcal{M}^\mu$-messbare Funktion

Dann existiert eine monoton wachsende Folge (g_n) von nicht-negativen, einfachen, $\mathcal{M}^\mu$ messbaren Funktionen, mit

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) \ \ \forall \ x \in M$$

Dabei existieren nach vorigem Fall nicht-negative, einfache, $\mathcal{M}$-messbare Funktionen $g_{n1}, \ g_{n2}$ mit

$$g_{n1} \leq g_n \leq g_{n2} \ \wedge \ \mu\left(\{g_{n1} \neq g_{n2}\}\right) = 0$$

Setzen wir

$$f_1 := \limsup_{n \to \infty} g_{n1} \ , \ f_2 := \liminf_{n \to \infty} g_{n2}$$

so gilt:

- f_1, f_2 sind $\mathcal{M}$-messbar.
- $f_1 \leq f \leq f$, da

$$f_1(x) = \forall \ x \ \forall n : g_{n1}(x) \leq g_n(x) \leq g_{n2}(x) \ \rightarrow \ \limsup_{n \to \infty} g_{n1}(x) \leq \underbrace{\lim_{n \to \infty} g_n(x)}_{f(x)} \leq \liminf_{n \to \infty} g_{n2}(x) = f_2(x)$$

- $\mu\left(\{f_1 \neq f_2\}\right) = 0$, denn

$$\mu\left(\{f_1 \neq f_2\}\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{g_{n1} \neq g_{n2}\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu\left(\{g_{n1} \neq g_{n2}\}\right)}_{0} = 0$$

Somit ist die Behauptung für nicht-negative, $\mathcal{M}^\mu$-messbare Funktionen gezeigt.

Fall: f beliebige $\mathcal{M}^\mu$ messbare Funktion

Dann sind f^+, f^- nicht-negativ, $\mathcal{M}^\mu$ messbar. Somit existieren nach vorigem Fall nicht-negative, $\mathcal{M}$-messbare Funktionen $f_1^+, f_2^+, f_1^-, f_2^-$ mit

$$f_1^+ \leq f^+ \leq f_2^+ \ , \ f_1^- \leq f^- \leq f_2^- \ , \ \mu\left(\left\{f_1^+ \neq f_2^+\right\}\right) = \mu\left(\left\{f_1^- \neq f_2^-\right\}\right) = 0$$

Setzen wir $f_1 := f_1^+ - f_2^-, \ f_2 := f_2^+ - f_1^-$ so gilt:

- f_1, f_2 sind $\mathcal{M}$-messbar, da Linearkombinationen $\mathcal{M}$ messbarer Funktionen.
- $f_1 \leq f \leq f_2$
- $\mu\left(\{f_1 \neq f_2\}\right) = 0$, denn

$$\mu\left(\{f_1 \neq f_2\}\right) \leq \mu\left(\left\{f_1^+ \neq f_2^+\right\} \cup \left\{f_1^- \neq f_2^-\right\}\right) \leq \underbrace{\mu\left(\left\{f_1^+ \neq f_2^+\right\}\right)}_{0} + \underbrace{\mu\left(\left\{f_1^- \neq f_2^-\right\}\right)}_{0} = 0$$

Somit ist der Satz bewiesen. $\square$