Maß & Integrationstheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 08 - Lösungen

Stilianos Louca

16. Juni 2008

Aufgabe 01

Zeigen: $\sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0$ ist eine σ-Algebra über M_0

Es bezeichne "^{c_0}" die Komplementbildung in M_0. Zeigen die 3 Axiome einer σ-Algebra:

(i) Wegen $M \in \sigma_M(\mathcal{S})$ ist auch $M_0 = M \cap M \in \sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0$.

(ii) Sei $A \in \sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0$, das heißt $A = B \cap M_0,\ B \in \sigma_M(\mathcal{S})$. Dann ist $B^c \in \sigma_M(\mathcal{S})$ und somit auch

$$A^{c_0} = M_0 \setminus A = M_0 \setminus (B \cap M_0) = M_0 \setminus B = M_0 \cap B^c \in \sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0$$

(iii) Seien $A_n = B_n \cap M_0 \in \sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0,\ B_n \in \sigma_M(\mathcal{S})$. Dann ist auch

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \cap M_0 = \underbrace{\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)}_{\in\sigma_M(\mathcal{S})} \cap M_0 \in \sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0$$

Zeigen: $\sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0 = \sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)$

a) Zu zeigen wären beide Inklusionsrichtungen:

- **Zeigen:** $\sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0) \subset \sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0$.
  In Übungsserie (06) haben wir gesehen: Für Systeme $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \subset \mathscr{P}(\Omega)$ ist $\sigma_\Omega(\mathcal{S}_1) \subset \sigma_\Omega(\mathcal{S}_2)$. Wegen $\mathcal{S} \subset \sigma_M(\mathcal{S})$ ist

  $$\underbrace{\mathcal{S} \cap M_0}_{\subset\mathscr{P}(M_0)} \subset \underbrace{\sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0}_{\subset\mathscr{P}(M_0)}$$

  und somit

  $$\sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0) \subset \sigma_{M_0}\left(\sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0\right) = \sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0 \quad \text{da } \left(\sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0\right) \text{ schon } \sigma\text{-Algebra über } M_0$$

- **Zeigen:** $\sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0 \subset \sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)$
  Nennen

  $$\mathcal{C} := \{A \in \sigma_M(\mathcal{S}) : A \cap M_0 \in \sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)\}$$

  Dann ist $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra über M, denn:
  - Wegen $M \cap M_0 = M_0 \in \sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)$ ist auch $M \in \mathcal{C}$.
  - Für $A \in \mathcal{C}$ ist (per Konstruktion) $A \cap M_0 \in \sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)$, also

  $$A^c \cap M_0 = \underbrace{(A \cap M_0))}_{\in\sigma_{M_0}(\mathcal{S}\cap M_0)}{}^{c_0} \ \Rightarrow\ (A \cap M_0)^{c_0} = A^c \cap M_0 \in \sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)$$

– Für $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ gilt wegen $A_n \cap M_0 \in \sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)$ auch

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap M_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(A_n \cap M_0)}_{\in\sigma_{M_0}(\mathcal{S}\cap M_0)} \in \sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)$$

Ferner gilt $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ denn, für $A \in \mathcal{S}$ gilt:

$$A \cap M_0 \in \mathcal{S} \cap M_0 \subset \sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)$$

Somit ist $\sigma_M(\mathcal{S}) \subset \mathcal{C}$ also (per Definition von $\mathcal{C}$)

$$\sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0 \subset \sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)$$

Somit gilt: $\sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0 = \sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)$. $\square$

b) Es bezeichne

$$B^o_\varepsilon(x) := \{y \in E \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$$

die offene ε-Kugel um x. Es sei $\mathcal{G}$ das System aller offenen Mengen in (E,ρ) und $\mathcal{G}_0$ das System aller offenen Mengen in (E_0,ρ_0) wobei

$$\rho_0 := \rho_{E_0\times E_0} = \rho\,|_{E_0\times E_0}$$

Dann gilt: $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \cap E_0$.
Beweis:

- Sei $G_0 \in \mathcal{G}_0$. Dann existiert für jedes $x \in G_0$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $B^o_{\varepsilon_x}(x) \cap E_0 \subset G_0$ (Offenheit in E_0). Setzen

$$G := \bigcup_{x\in G_0} B^o_{\varepsilon_x}(x)$$

Dann ist G offen in (E,ρ) da Vereinigung in (E,ρ) offener Mengen. Ferner ist klar: $G_0 = \underbrace{G}_{\in\mathcal{G}} \cap E_0$ und somit $G_0 \in \mathcal{G} \cap E_0$ denn

$$G = G_0 \cup \bigcup_{x\in G_0} [\underbrace{(B^o_{\varepsilon_x}(x) \cap E_0)}_{\subset G_0} \cup (B^o_{\varepsilon_x}(x) \setminus E_0)] = \underbrace{G_0}_{\subset E_0} \cup \underbrace{\bigcup_{x\in G_0} \left(B^o_{\varepsilon_x}(x) \setminus E_0\right)}_{\subset E_0^c}$$

Somit ist $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G} \cap E_0$.

- Sei $G \in \mathcal{G}$ beliebig. Für beliebiges $x \in G$ existiert dann ein $\varepsilon_x > 0$ mit $B^o_{\varepsilon_x}(x) \subset G$. Für beliebiges $x \in G \cap E_0$ ist dann insbesondere

$$\left(B^o_{\varepsilon_x}(x) \cap E_0\right) \subset (G \cap E_0)$$

das heißt $G \cap E_0$ ist offen in (E_0,ρ_0) und somit $\mathcal{G} \cap E_0 \subset \mathcal{G}_0$.

Nach Teil (a) ist dann

$$\mathcal{B}(E_0) = \sigma_{E_0}(\mathcal{G}_0) = \sigma_{E_0}(\mathcal{G} \cap E_0) \overset{(a)}{=} \sigma_E(\mathcal{G}) \cap E_0 = \mathcal{B}(E) \cap E_0 \quad \square$$

Aufgabe 02

Betrachten die Mengenfunktion über die σ-Algebra $\mathcal{M} := \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$\mu = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \delta_r$$

wobei δ_r das Dirac-Maß sei. Dann ist bekanntlich μ auch ein Maß, und sogar σ-endlich, denn es ist

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{r\} \ \ , \ \ \mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0 \ \wedge \ \mu(\{r\}) = 1 \ \forall\, r \in \mathbb{Q} \ , \ \mathbb{Q} : \text{abzählbar}$$

Doch μ ist nicht lokal endlich, denn zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ existieren unendlich viele rationale Zahlen $r \in \mathbb{Q}$ mit $r \in B^o_\varepsilon(x)$, das heißt $\mu\left(B^o_\varepsilon(x)\right) = \infty$. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist. Gäbe es nämlich ein $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ mit

$$|B^o_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q}| = n \in \mathbb{N}\ ,\ B^o_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q} = \{r_1, .., r_n\} \ \ ,\ \text{o.B.d.A } r_i < r_{i+1}$$

so könnte man z.b. *zwischen* r_1 und r_2 keine weiteren rationalen Zahlen finden (da $[r_1, r_2] \subset B^o_\varepsilon(x)$, das heißt jede rationale zahl $r_1 < r < r_2$ wäre auch in $B^o_\varepsilon(x)$), was ein Widerspruch ist.

Aufgabe 03

Betrachten die σ-Algebra $\mathcal{M} = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ über $\mathbb{N}$ und die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(n) := (-1)^n$$

Dann ist diese nicht messbar auf $(\mathbb{N}, \mathcal{M})$, denn

$$f^{-1}(\{1\}) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\} \notin \mathcal{M}$$

Doch $|f|$ ist schon messbar, da für beliebiges $A \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$|f|^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & : 1 \notin A \\ \mathbb{N} & : 1 \in A \end{cases} \in \mathcal{M}$$

Aufgabe 04

Zwischenrechnung

Seien $\mathcal{G}, \mathcal{F} \subset \mathscr{P}(E)$ jeweils das System aller offenen und abgeschlossenen Mengen aus E. Da jede abgeschlossene Menge $F \in \mathcal{F}$ das Komplement einer offenen Menge $G_F \in \mathcal{G}$ ist, enthält $\sigma(\mathcal{F})$ auch alle offenen Mengen, das heißt

$$\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$$

Analog ist auch $\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{F})$ also

$$\mathscr{B}(E) = \sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{F})$$

Somit ist $\mathcal{F}$ Erzeuger der Borelmengen über E.

Zeigen: f messbar

Für beliebige abgeschlossene Menge $F \subset E$ sei $\varphi(x) := \rho(x, F),\ x \in E$. Aus Übungsserie 01 wissen wir: die Funktion $\varphi : E \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig auf E, und somit auch stetig. Als Funktion zwischen den metrischen Räumen $(E, \mathscr{B}(E))$ und $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ ist φ somit messbar. Als Verkettung messbarer Funktionen, sind somit auch die $g_n = \varphi \circ f_n$ von $(M, \mathcal{M})$ nach $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ messbar. Definieren wir die Abbildung

$$g := \varphi \circ f$$

so gilt:

$$g(x) = \varphi(f(x)) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \overset{\varphi \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

Per Konstruktion ist g auf ganz M definiert, das heißt der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ existiert auf ganz M. Bekanntlich ist dann

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

auf $(M, \mathcal{M} \cap M) = (M, \mathcal{M})$ messbar. Aus Übungsserie 01 wissen wir: da F abgeschlossen ist, ist

$$F = \{x \in E \mid \rho(x, F) = 0\}$$

das heißt $F = \varphi^{-1}(\{0\})$. Da g messbar ist, und $\{0\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, folgt

$$f^{-1}(F) = f^{-1}\left[\varphi^{-1}(\{0\})\right] = (\varphi \circ f)^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{M}$$

das heißt $f^{-1}(F) \in \mathcal{M}\ \ \forall\, F \in \mathcal{F}$, und somit $f : (M, \mathcal{M}) \to (E, \mathscr{B}(E))$ messbar. $\square$