Übungen zur Vorlesung
"Maß und Integral"

SS 2008

8. Serie

1. (a) Es sei $\mathcal{S}$ ein Mengensystem von Teilmengen einer nichtleeren Menge M und $M_0 \subseteq M$. Man zeige, daß die Beziehung **4 P**

$$\sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0 = \sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnet $\sigma_M(\mathcal{S})$ die kleinste σ-Algebra von Teilmengen von M, die $\mathcal{S}$ enthält, und $\sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)$ die kleinste σ-Algebra von Teilmengen von M_0, die $\mathcal{S} \cap M_0$ enthält. (Ist $\mathcal{K}$ ein Mengensystem von Teilmengen von M, so sei

$$\mathcal{K} \cap M_0 = \{A \cap M_0 : A \in \mathcal{K}\}.)$$

(b) Es sei (E, ρ) ein metrischer Raum und $E_0 \subseteq E$. Man zeige, daß für die σ-Algebra $\mathcal{B}(E_0)$ der Borelmengen des metrischen Unterraumes $(E_0, \rho_{E_0 \times E_0})$, wobei $\rho_{E_0 \times E_0}$ die Einschränkung der Metrik ρ auf $E_0 \times E_0$ bezeichnet, die Beziehung **2 P**

$$\mathcal{B}(E_0) = \mathcal{B}(E) \cap E_0$$

erfüllt ist.

2. Man finde ein Beispiel für ein σ-endliches Maß, welches nicht lokal endlich ist. **3 P**

3. Es seien $(M, \mathcal{M})$ ein meßbarer Raum und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, daß aus der Meßbarkeit der Abbildung $|f|$ im allgemeinen nicht die Meßbarkeit von f folgt. **3 P**

4. Es sei $(f_n)_{n \geq 1}$ eine Folge meßbarer Funktionen auf dem meßbaren Raum $(M, \mathcal{M})$ mit Werten in dem meßbaren Raum $(E, \mathcal{B}(E))$, wobei (E, ρ) ein metrischer Raum ist und $\mathcal{B}(E)$ die σ-Algebra die Borelmengen bezeichnet. Für jedes $x \in M$ existiere der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ in (E, ρ), und es sei f definiert als **4 P**

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad x \in M.$$

Man beweise, daß f wiederum eine meßbare Funktion von $(M, \mathcal{M})$ in $(E, \mathcal{B}(E))$ ist.
Hinweis: Sei $F \subseteq E$ abgeschlossen und

$$\varphi(x) = \rho(x, F), \quad x \in E.$$

Man wende das entsprechende Resultat für die *reellwertigen* Funktionen $g_n = \varphi \circ f_n$ aus der Vorlesung an und leite daraus ab, daß $f^{-1}(F)$ zu $\mathcal{M}$ gehört.

Abgabe: 1. Gruppe: Montag, 9. Juni 2008, zur Übungszeit
2. Gruppe: Dienstag, 10. Juni 2008, zur Übungszeit