Übungen zur Vorlesung
"Maß und Integral"

SS 2008

7. Serie

1. Es sei $M = \{1, 2, \cdots, n\}$ und P eine Permution von M (d. h., eine umkehrbar eindeutige Abbildung von M auf sich). Wir betrachten das Mengensystem $\mathcal{M}$ aller P-invarianten Mengen: 3 P

$$\mathcal{M} = \{A \subseteq M : P^{-1}(A) = A\}.$$

Man zeige, daß $(M, \mathcal{M})$ ein meßbarer Raum ist. Wie lassen sich die meßbaren reellen Funktionen über $(M, \mathcal{M})$ beschreiben?

2. Für alle $x \in \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ sei

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = +\infty, \\ \frac{x}{1+|x|}, & \text{falls } x \in \mathbb{R}, \\ -1, & \text{falls } x = -\infty. \end{cases}$$

(a) Man zeige, daß $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\rho})$ mit

$$\hat{\rho}(x, y) = |h(x) - h(y)|, \quad x, y \in \hat{\mathbb{R}},$$

ein metrischer Raum ist.

(b) Man zeige, daß h eine stetige umkehrbar eindeutige Abbildung von $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\rho})$ auf den metrischen Raum $([-1, +1], \rho)$ mit 6 P

$$\rho(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in [-1, +1],$$

vermittelt. Man bestimme die Umkehrabblidung h^{-1} und zeige, daß h^{-1} ebenfalls stetig ist.

(c) Man beweise: Eine Teilmenge G von $\mathbb{R}$ ist genau dann offen in $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\rho})$, wenn sie offen in $(\mathbb{R}, \rho)$ mit der üblichen Metrik ρ:

$$\rho(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

ist.

3. Man zeige, daß jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Funktion des meßbaren Raumes $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ in sich meßbar ist. Man leite daraus ab, daß jede Funktion von beschränkter Variation meßbar ist. 3 P

4. * Es sei $\mathcal{K}$ eine kompakte Klasse von Teilmengen einer nichtleeren Menge M. Man zeige: 6 ZP

   (a) Das System $\mathcal{K}_s$ mit

   $$\mathcal{K}_s = \{K = \cup_{k=1}^n A_k : A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{K}, n \geq 1\}$$

   ist wiederum eine kompakte Klasse.

   (b) $\mathcal{K}_\delta$ und $\mathcal{K}_{s\delta}$ sind kompakte Klassen.

Abgabe: 1. Gruppe: Montag, 2. Juni 2008, zur Übungszeit
2. Gruppe: Dienstag, 3. Juni 2008, zur Übungszeit

*Für Kniffler. Wer die Aufgabe vollständig ohne fremde Hilfe löst und in den Übungen vorrechnet, erhält ein kostenloses Exemplar von [6] (vgl. Literaturliste). Erfüllen mehrere die Vorraussetzungen, so wird der Gewinner ausgelost.