Maß & Integrationstheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 06 - Lösungen

Stilianos Louca

20. Juli 2008

Aufgabe 01

Bemerkungen:

- Definieren $[-\infty,b) := (-\infty,b) = [-\infty,b) \cap \mathbb{R}$ und $[-\infty,b] := (-\infty,b]$. Analog auch $[a,\infty] := [a,\infty)$, $(a,\infty] := (a,\infty)$.
- Definieren $(\infty,\infty) := \emptyset$, $(-\infty,-\infty) := \emptyset$.
- Definieren für $a,b \in \mathbb{R}$:

$$(a,b) := \begin{cases} (a,b) & : a \leq b \\ (b,a) & : \text{sonst} \end{cases}$$

  Analog auch für $[a,b), (a,b], [a,b]$.
- Für das System $\mathcal{G}$ aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist definiert $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{G})$.

a) $\mathcal{C}$ ist tatsächlich eine Halbalgebra, denn:

- $\mathbb{R} = [-\infty,\infty) \in \mathcal{C}$
- Für $[a,b) \in \mathcal{C}$ ist

$$[a,b)^c = \underbrace{[-\infty,a)}_{\in\mathcal{C}} \overset{+}{\cup} \underbrace{[b,\infty)}_{\in\mathcal{C}}$$

- Für $[a,b),[\alpha,\beta) \in \mathcal{C}$ ist

$$[a,b)\cap[\alpha,\beta) = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset = [0,0) & : b < \alpha \ \vee \ \beta < a \\ & \\ [\max\{a,\alpha\},\ \min\{b,\beta\}) & : \text{sonst} \end{array} \right\} \in \mathcal{C}$$

b) **Vorbetrachtung:**

(i) Für beliebige Systeme $\mathcal{W},\mathcal{V} \subset \mathscr{P}(M),\ \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ gilt

$$\sigma(\mathcal{W}) \subset \sigma(\mathcal{V})$$

Beweis: Da jede Menge $\mathcal{M}$ die $\mathcal{V}$ enthält auch $\mathcal{W}$ enthält (*), folgt

$$\sigma(\mathcal{W}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{M}\ \sigma-\text{Algebra} \\ \mathcal{W}\subset\mathcal{M}}} \mathcal{M} \overset{*}{\subset} \bigcap_{\substack{\mathcal{M}\ \sigma-\text{Algebra} \\ \mathcal{V}\subset\mathcal{M}}} \mathcal{M} = \sigma(\mathcal{V})$$

(ii) Für beliebiges System $\mathcal{W} \subset \mathscr{P}(M)$ gilt:

$$\alpha(\mathcal{W}) \subset \sigma(\mathcal{W})$$

Beweis: Da jede das System $\mathcal{W}$ enthaltende σ-Algebra gleichzeitig auch eine Algebra ist (*), folgt

$$\alpha(\mathcal{W}) = \bigcap_{\substack{\mathscr{A}\ \text{Algebra} \\ \mathcal{W}\subset\mathscr{A}}} \mathscr{A} \overset{*}{\subset} \bigcap_{\substack{\mathscr{A}\ \sigma-\text{Algebra} \\ \mathcal{W}\subset\mathscr{A}}} \mathscr{A} = \sigma(\mathcal{W})$$

(iii) Sei $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra und $\mathcal{W} \subset \mathcal{M}$ beliebig. Dann gilt:

$$\sigma(\mathcal{W}) \subset \mathcal{M}$$

Beweis: Aus obigen Überlegungen folgt unmittelbar

$$\sigma(\mathcal{W}) \subset \sigma(\mathcal{M}) \overset{\mathcal{M}\ \sigma-\text{Algebra}}{=} \mathcal{M}$$

(iv) Jedes System von disjunkten Intervallen nicht-verschwindender Länge $\{J_i\}_{i\in I}$ auf $\mathbb{R}$ ist abzählbar.
Beweis: Für jedes dieser Intervalle gibt es ein $x_i \in J_i$ und ein $\varepsilon_i > 0$ so dass $[x_i, x_i + \varepsilon] \subset J_i$ ist, denn für $(a,b), a < b$ ist z.B $\left[a + \frac{b-a}{3}, a + \frac{2(b-a)}{3}\right] \subset (a,b)$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es zu jedem x_i ein $r_i \in \mathbb{Q}$ so dass $r_i \in [x_i, x_i + \varepsilon_i] \subset J_i$ liegt. Da die J_i disjunkt sind, sind die r_i paarweise verschieden, das heißt die Zuordnung $I \ni i \mapsto r_i \in \mathbb{Q}$ ist injektiv. Somit muss $|I| \leq |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ sein.

Folgerungen:

- Wegen $\mathcal{C} \subset \mathscr{A}$ ist $\sigma(\mathcal{C}) \overset{(i)}{\subset} \sigma(\mathscr{A})$. Wegen $\underbrace{\alpha(\mathcal{C})}_{\mathscr{A}} \overset{(ii)}{\subset} \sigma(\mathcal{C})$ muss außerdem $\sigma(\mathscr{A}) \overset{(iii)}{\subset} \sigma(\mathcal{C})$ sein, so dass schließlich folgt $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathscr{A})$.
- Jedes beliebige Intervall $[a,b) \in \mathcal{C}$ ist wegen

$$[a,b) = \underbrace{(-\infty, a)}_{\in\mathcal{G}}{}^c \cap \underbrace{(a-1, b)}_{\in\mathcal{G}}$$

auch in $\sigma(\mathcal{G})$ enthalten, das heißt allgemein $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{G})$. Also ist $\sigma(\mathcal{C}) \overset{(iii)}{\subset} \sigma(\mathcal{G})$.
- Zu zeigen wäre: $\sigma(\mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{C})$. Sei $G \in \mathcal{G}$. Definieren dann für beliebiges $x \in G$:

$$I_x := \{y \in \mathbb{R} : [x,y] \subset G\}$$

Dabei ist I_x stets ein Intervall nicht-verschwindender Länge, denn für jedes $x \in G$ existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset G$ ist (da G offen). Ferner ist klar: $x \in I_x$ und für $x, y \in G$ gilt:

$$y \in I_x \;\Leftrightarrow\; I_y = I_x$$

also

$$I_x \cap I_y \neq \emptyset \quad\Leftrightarrow\quad \exists\, z \in I_x \cap I_y \quad\Leftrightarrow\quad I_x = I_z = I_y$$

Demnach können wir schreiben:

$$G = \bigcup_{x\in G} I_x$$

wobei die in der Vereinigung einbezogenen Intervalle entweder disjunkt oder identisch sind, das heißt G setzt sich im Endeffekt aus Vereinigung disjunkter, nicht-leerer Intervalle (eins aus jeder *Klasse* identischer I_x) zusammen (beachte: Auswahlaxiom!). Nach (iv) sind diese abzählbar.

In Übungsserie (05) haben wir gezeigt: Für beliebige $a < b \in \mathbb{R}$ ist $[a,b], (a,b], (a,b), \{a\} \in \sigma(\mathcal{C})$, so dass insbesondere $I_x \in \sigma(\mathcal{C})$ sind. Da $\sigma(\mathcal{C})$ eine σ-Algebra ist, ist auch jede (abzählbare) Vereinigung von I_x in $\sigma(\mathcal{C})$, also $G \in \sigma(\mathcal{C})$.

Somit wurde gezeigt: $\mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{C})$. Also ist nach (iii) auch $\sigma(\mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{C})$ und somit $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{G})$.

□

Aufgabe 02

a) Sei μ lokal endlich auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, das heißt $\forall\, x \in \mathbb{R}$ existiert eine offene Menge $G_x \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ mit $x \in G_x$ und $\mu(G_x) < \infty$.
Zeigen: Für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$\mu(K) < \infty$$

Sei K eine kompakte Menge, und für jedes Element $x \in K$ sei $G_x \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ eine offene Menge mit $x \in G_x$ und $\mu(G_x) < \infty$. Dann ist

$$\bigcup_{x \in K} G_x$$

eine Überdeckung von K durch offene Mengen. Da K kompakt ist, gibt es schon endlich viele $x_1, .., x_n$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i}$$

also ist

$$\mu(K) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(G_{x_i}) < \infty \quad \square$$

b) Sei $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mu)$ ein Maßraum in dem jede kompakte Menge ein endliches Maß hat.
Zeigen: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu([-n, n]) < \infty$$

Bekanntlich ist im $\mathbb{R}^n$ jede abgeschlossene und beschränkte Menge auch kompakt. Insbesondere sind abgeschlossene, endliche Intervalle, unter anderem $[-n, n]$, auch kompakt. Also ist

$$\mu([-n, n]) < \infty \quad \square$$

c) Es gelte: $\mu([-n, n]) < \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Zeigen: μ ist lokal endlich. Sei also $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > |x|$, das heißt $x \in (-n, n)$. Das Intervall $(-n, n)$ ist außerdem offen und es gilt

$$\mu((-n, n)) \leq \mu([-n, n]) < \infty$$

Somit ist μ lokal endlich. $\square$

Es wurde gezeigt: $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$. Somit ist die Äquivalenz der Aussagen bewiesen. $\square$

Aufgabe 03

Sei

$$\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R} \mid \exists\; A_1, A_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : A_1 \subset A \subset A_2 \;\wedge\; \mu(A_1 \triangle A_2) = 0\}$$

die Vervollständigung der σ-Algebra der Borelmengen $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ und μ die entsprechende Fortsetzung des Lebesque Maßes λ auf $\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$. Sei $A \in \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$ beliebig, das heißt es gibt $A_1, A_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ mit $A_1 \subset A \subset A_2$ und $\lambda(A_1 \triangle A_2) = 0$. Definitionsgemäß ist dann $\mu(A) = \lambda(A_1)$. Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$A^r := r + A = \{r + x \mid x \in A\}$$

Analog seien auch A_1^r und A_2^r definiert. Dann gilt: $A_1^r \subset A^r \subset A_2^r$, denn:

- Für $x \in A_1^r$ ist $x = r + y$ für bestimmtes $y \in A_1 \subset A$ also ist auch $x = r + y \in A^r$.
- Für $x \in A^r$ ist $x = r + y$ für bestimmtes $y \in A \subset A_2$ also ist auch $x = r + y \in A_2^r$.

Ferner ist $A_1^r \triangle A_2^r \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und $\lambda(A_1^r \triangle A_2^r) = 0$ denn:

- Da λ auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \ni A_1, A_2$ verschiebungsinvariant ist, sind auch $A_1^r, A_2^r \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und somit auch $A_1^r \triangle A_2^r \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$
- Es ist $A_1^r \triangle A_2^r = r + (A_1 \triangle A_2)$ denn:

- Ist $x \in A_1^r \triangle A_2^r$, das heißt $x \in A_1^r \setminus A_2^r$ oder $x \in A_2^r \setminus A_1^r$, o.B.d.A $x \in A_1^r \setminus A_2^r$. Dann ist $x = r + y$ für ein bestimmtes $y \in A_1$ für das gilt: $y \notin A_2$ (denn sonst wäre $x = r + y \in A_2^r$). Somit ist $y \in A_1 \setminus A_2 \subset A_1 \triangle A_2$ also $x = r + y \in r + A_1 \triangle A_2$.
- Ist $x \in r + A_1 \triangle A_2$ so gibt es ein $y \in A_1 \triangle A_2$ mit $x = r + y$. O.B.d.A sei $y \in A_1 \setminus A_2$. Dann ist insbesondere $x = r + y \in A_1^r$ und $x = r + y \notin A_2^r$, also $x \in A_1^r \setminus A_2^r \subset A_1^r \triangle A_2^r$.
- Bemerke dass für $y \notin A_2$ gilt: $r + y \notin A_2^r$, denn sonst gäbe es ein $z \in A_2$ mit $r + y = r + z \;\rightarrow\; y = z \in A_2$ was ein Widerspruch ist.

- Somit ist
$$\lambda(A_1^r \triangle A_2^r) = \lambda(r + A_1 \triangle A_2) \overset{\text{Verschiebungsinvariant}}{=} \lambda(A_1 \triangle A_2) = 0$$

Also ist $A^r \in \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$ und ferner

$$\mu(A_r) = \lambda(A_1^r) \overset{\text{Verschiebungsinvariant}}{=} \lambda(A_1) = \mu(A) \quad \square$$

Variante: Hat man gezeigt dass $A_1^r \triangle A_2^r \subset r + (A_1 \triangle A_2)$ ist, so ist die Gleichheit nicht erforderlich, denn wegen Monotonie folgt
$$\lambda(A_1^r \triangle A_2^r) \leq \mu(r + A_1 \triangle A_2) = \mu(A_1 \triangle A_2) = 0$$

Aufgabe 04

Bemerkungen:

- Für Folge $(c_n) \subset \mathbb{N}$ schreiben wir $x_c := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot 3^{-n}$. Ist $c_n \in \{0, 2\}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ so ist $x_c \in C$.
- Aus der Vorlesung ist bekannt: jedes Intervall $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b],\ a < b \in \mathbb{R}$ ist eine Borelmenge. Insbesondere ist dann auch für jedes $a \in \mathbb{R} : \{a\} = [a, a] \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

a) Für ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ bezeichne

$$\mathscr{D}_a^b := \left(a + \frac{a-b}{3}, a + \frac{2(a-b)}{3}\right) \subset [a, b]$$

Dann ist insbesondere $\mathscr{D}_a^b \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ für alle $a < b \in \mathbb{R}$ eine Borelmenge. Die Menge C bildet sich wie folgt:

- Im ersten schritt wird von $[0, 1]$ die Borelmenge $\mathscr{D}_0^1$ entfernt: Übrig bleibt die ebenfalls Borelmenge (da $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ σ-Algebra) $[0, 1] \setminus \mathscr{D}_0^1 =: C_1$.
- Schritt n: Gegeben C_{n-1}, bildet man C_n indem man die 2^{n-1} entsprechenden *mittlere-Drittel* Intervalle $\mathscr{D}_{a_n^i}^{b_n^i} \subset C_{n-1}$ *abzieht*:
$$C_n = C_{n-1} \setminus \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \mathscr{D}_{a_n^i}^{b_n^i}$$
Diese Operationen sind endlich viele (und insbesondere Abzählbar), und somit ist $C_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
Bemerkung: Eine genauere Formulierung der a_n^i ist hier bedeutungslos. Durch die Formulierung in der Aufgabenstellung sind sie eindeutig festgelegt.
- Nach unendlich vielen, abzählbaren Schritten ergibt sich C als $C \cong C_\infty$ gemäß
$$C = [0, 1] \setminus \biguplus_{n=1}^{\infty} \biguplus_{i=1}^{2^{n-1}} \mathscr{D}_{a_n^i}^{b_n^i}$$

Abzählbare Vereinigungen von abzählbar vielen Mengen haben maximal die Kardinalität $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sind also selbst wieder abzählbar. Somit bildet sich C nach abzählbar vielen Mengenoperationen unter Borelmengen. Da $\mathscr{B}(\lambda)$ eine σ-Algebra ist, ist $C \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. $\square$

b) Die im obigen Beweis eingeführten Intervalle $\mathscr{D}_a^b$ haben im n-ten Schritt das Maß $\lambda\left(\mathscr{D}_{a_n^i}^{b_n^i}\right) = 3^{-n}$. Dabei werden zu jedes mal 2^{n-1} solche Intervalle von der Menge *entfernt*, und es gilt

$$\mathscr{D}_{a_n^i}^{b_n^i} \cap \mathscr{D}_{a_m^j}^{b_m^j} = \emptyset \quad \forall\ n \neq m \text{ bzw. } \forall\ i \neq j$$

Somit ist

$$\lambda(C) = \lambda\left([0,1] \setminus \biguplus_{n=1}^{\infty} \biguplus_{i=1}^{2^{n-1}} \mathscr{D}_{a_n^i}^{b_n^i}\right) = \lambda([0,1]) - \underbrace{\lambda\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} \biguplus_{i=1}^{2^{n-1}} \mathscr{D}_{a_n^i}^{b_n^i}\right)}_{\text{endlich da } \subset [0,1]} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\biguplus_{i=1}^{2^{n-1}} \mathscr{D}_{a_n^i}^{b_n^i}\right)$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \underbrace{\lambda\left(\mathscr{D}_{a_n^i}^{b_n^i}\right)}_{3^{-n}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot 3^{-n} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 0$$

c) Betrachten die Menge

$$\mathscr{L} := \{(c_n) \subset \mathbb{N} \mid (c_n) \text{ Folge in } \mathbb{N} \text{ mit } c_n \in \{0,2\}\}$$

Dann ist offensichtlich $|\mathscr{L}| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})| = 2^{\operatorname{card}(\mathbb{N})}$, denn die Abbildung

$$f : \mathscr{L} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}) \ , \ f((c_n)) := \{m \in \mathbb{N} \mid c_m = 2\} \subset \mathbb{N}$$

ist eine Bijektion zwischen $\mathscr{L}$ und $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.
Beweis:

- f ist injektiv, denn für $f((c_n)) = f((b_n))$ gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$: Es ist $m \in f((c_n))$ genau dann wenn $m \in f((b_n))$ ist, also $c_m = b_m$ also $(c_n) = (b_n)$.
- f ist surjektiv, denn für jede Menge $M \subset \mathbb{N}$ ist die Folge (c_n) definiert durch

$$c_n := \begin{cases} 0 & : n \notin M \\ 2 & : n \in M \end{cases}$$

ein Element in $\mathscr{L}$, und es ist $f((c_n)) = M$.

Nach der Kontinuumshypothese ist also $|\mathscr{L}| = |\mathbb{R}|$. Doch wegen

$$C = \bigcup_{(c_n) \in \mathscr{L}} \{x_c\}$$

ist $|C| = |\mathscr{L}| = |\mathbb{R}|$.

d) Da $\left(\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R}), \lambda\right)$ vollständig ist, und $[0,1] \in \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$ eine Nullmenge ist, gilt für jede Teilmenge $A \subset C$: $A \in \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$. Doch die Menge aller Teilmengen von C, das heißt $\mathscr{P}(C)$, hat bekanntlich die Kardinalität $2^{\operatorname{card}(C)} = 2^{\operatorname{card}(\mathbb{R})}$, so dass wegen $\mathscr{P}(C) \subset \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$ gelten muss:

$$\operatorname{card}\left\{\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})\right\} \geq \operatorname{card}\left\{\mathscr{P}(C)\right\} \geq 2^{\operatorname{card}(\mathbb{R})}$$

Wegen $\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R}) \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}) \ \to \ \operatorname{card}\left\{\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})\right\} \leq \operatorname{card}\left\{\mathscr{P}(\mathbb{R})\right\} = 2^{\operatorname{card}(\mathbb{R})}$ folgt schließlich

$$\operatorname{card}\left\{\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})\right\} = 2^{\operatorname{card}(\mathbb{R})}$$

e) Wie schon in Teil (a) erläutert, ergibt sich C als

$$C = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\left\{(-\infty,0) \cup (1,\infty) \cup \biguplus_{n=1}^{\infty} \biguplus_{i=1}^{2^{n-1}} \mathscr{D}_{a_n^i}^{b_n^i}\right\}}_{\Omega}$$

wobei Ω sich aus Vereinigung offener Mengen zusammensetzt. Bekanntlich, sind beliebige Vereinigungen offener Mengen auch wieder offen, das heißt Ω ist offen. Somit ist $C = \Omega^c$ abgeschlossen. Sei nun $x \in C$, das heißt $\exists\ (c_n) \subset \mathbb{N}$ mit

$$x = x_c = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot 3^{-n}\ ,\ c_n \in \{0,2\}$$

Sei außerdem $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $3^{-n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Betrachten wir die Folge $(b_n) \subset \mathbb{N}$ definiert durch

$$b_n := \begin{cases} c_n & : n \neq n_0 \\ 2 & : n = n_0\ \wedge\ c_n = 0 \\ 0 & : n = n_0\ \wedge\ c_n = 2 \end{cases}$$

so ist $(b_n) \in \mathscr{L}$ und $x_c \neq x_b \in C$. Der Abstand zwischen x_c und x_b ergibt sich ferner als

$$|x_c - x_b| = 2 \cdot 3^{-n_0} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Somit besitzt C keine isolierten Punkte, das heißt C ist in sich dicht und somit eine perfekte Menge. $\square$

f) Da C bereits abgeschlossen ist, ist der Abschluss von C gleich der Menge C selbst. Sei $x \in C$ beliebig. Zu zeigen wäre:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ :\ B^o_\varepsilon(x) \nsubseteq C \quad \text{mit} \quad B^o_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < \varepsilon\}$$

das heißt kein Punkt in C ist innerer Punkt. Sei also $\varepsilon > 0$ und $(c_n) \in \mathscr{L}$ so dass $x = x_c$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $3^{1-n_0} < \varepsilon$. Betrachten die Folge $(b_n) \subset \mathbb{N}$ definiert durch

$$b_n := \begin{cases} c_n & : n < n_0 \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $x_b \notin C$.
Beweis durch Widerspruch: Angenommen, $x_b \in C$, das heißt es gibt eine Folge $(h_n) \in \mathscr{L}$ mit $x_b = x_h$.

- Für beliebige $m \in \mathbb{N}$ und Folgen $(l_n) \subset \mathbb{N},\ l_n \in \{-2,-1,0,1,2\}$ mit $l_n = 0$ für $n < m$ und $l_m \neq 0$ gilt: Ist

  $$\sum_{n=1}^{\infty} l_n \cdot 3^{-n} = 0$$

  so muss gelten: $|l_n| = 2\ \ \forall\ n > m$. Denn angenommen $\exists\ k > m : |l_k| < 2$. Dann folgt
  Beweis:

  $$0 = \left|\sum_{n=1}^{\infty} l_n \cdot 3^{-n}\right| = \left| l_m \cdot 3^{-m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} l_n \cdot 3^{-n}\right| \geq \left|l_m \cdot 3^{-m}\right| - \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} l_n \cdot 3^{-n}\right|$$

  $$\geq 3^{-m} - \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} l_n \cdot 3^{-n}\right| \geq 3^{-m} - \sum_{n=m+1}^{\infty} |l_n| \cdot 3^{-n} = 3^{-m} - |l_k| \cdot 3^{-k} - \sum_{n=m+1}^{k-1} |l_n| \cdot 3^{-n} - \sum_{n=k+1}^{\infty} |l_n| \cdot 3^{-n}$$

  $$\geq 3^{-m} - |l_k| \cdot 3^{-k} - \sum_{n=m+1}^{k-1} 2 \cdot 3^{-n} - \sum_{n=k+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-n} = 3^{-m} - |l_k| \cdot 3^{-k} + 2 \cdot 3^{-k} - \sum_{n=m+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-n}$$

  $$= 3^{-m} - |l_k| \cdot 3^{-k} + 2 \cdot 3^{-k} - 3^{-m} = (2 - |l_k|) \cdot 3^{-k} > 0$$

  was ein Widerspruch ist!
- Es muss gelten:

  $$\sum_{n=1}^{\infty} h_n \cdot 3^{-1} = x_h = x_b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot 3^{-n} \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - b_n) \cdot 3^{-n} = 0$$

  Wegen $(h_n) \in \mathscr{L} \not\ni (b_n)\ \rightarrow\ (h_n) \neq (b_n)$ gibt es einen kleinsten Index $m \in \mathbb{N}$ mit $b_m \neq h_m$. Also ist $(h_n - b_n) = 0$ für $n < m$ und $(h_m - b_m) \neq 0$. Nach obiger Überlegung muss also $|h_n - b_n| = 2\ \ \forall\ n > m$ sein.

- Doch wegen $h_n \in \{0,2\}$ und $b_n = 1$ für $n > n_0$ ist für $n > n_0$ immer $|h_n - b_n| = 1$, was ein Widerspruch ist!

Somit ist $x_b \notin C$.

Bemerkung: Die Tatsache allein dass $(b_n) \notin \mathscr{L}$ ist, genügt im allgemeinen nicht um zu schließen dass $x_b \notin C$ ist. Beispiel: $x = \frac{1}{3}$ ist trotzdem in C. Dies liegt insbesondere daran dass die Darstellung von x nicht eindeutig ist, denn

$$3^{-1} = 0 \cdot 3^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} 2 \cdot 3^{-n}$$

Der Abstand $|x_b - x_c|$ ist gegeben durch

$$|x_b - x_c| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n) \cdot 3^{-n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n - c_n| \cdot 3^{-n} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \underbrace{|b_n - c_n|}_{\substack{=1 \\ \text{da } b_n=1 \\ \text{und } c_n \in \{0,2\}}} \cdot 3^{-n} = 3^{-n_0} \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{2} \cdot 3^{1-n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

das heißt $C \not\ni x_b \in B_\varepsilon^o(x_c)$. Somit ist für jedes $x \in C, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon^o(x) \nsubseteq C$. $\square$