Übungen zur Vorlesung
"Maß und Integral"

SS 2008

6. Serie

1. Es sei $\mathbb{R}$ die reelle Achse und 4 P

$$\mathcal{C} = \{[a,b) \cap \mathbb{R} : -\infty \leq a \leq b \leq +\infty\}.$$

   (a) Man zeige, daß $\mathcal{C}$ eine Halbalgebra von Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist.

   (b) Man beweise $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dabei bezeichne $\mathcal{A}$ die von $\mathcal{C}$ erzeugte Algebra.

2. Man beweise, daß für ein Maß m auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ folgende Aussagen äquivalent sind: 3 P

   (a) m ist lokal endlich.

   (b) Für jede kompakte Teilmenge K von $\mathbb{R}$ gilt

$$m(K) < +\infty.$$

   (c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$m([-n,n]) < +\infty.$$

3. Man beweise, daß das Lebesgue-Maß λ auch auf der Vervollständigung $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R}))$ von $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(R))$ verschiebungsinvariant ist. Dazu verwende man den entsprechenden Satz aus der Vorlesung für das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. 3 P

4*. Die Cantorsche Menge C ist als die Gesamtheit der reellen Zahlen $x \in [0,1]$ definiert, die die Darstellung 6 P

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot 3^{-n}, \quad c_n \in \{0,2\},$$

besitzen. Man erhält sie, wenn man aus $[0,1]$ das Intervall $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ entfernt, aus den verbleibenden abgeschlossenen Intervallen $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ jeweils das mittlere offene Drittel $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ und $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ entfernt und diesen Prozeß ad infinitum fortsetzt.

   (a) Man beweise, daß C eine Borel-Menge ist.

   (b) Man berechne das Lebesgue-Maß von C.

(c) Welche Mächtigkeit besitzt C?

(d) Welche Mächtigkeit besitzt demnach die σ-Algebra $\mathcal{B}^{\lambda}(\mathbb{R})$ der Lebesgue-meßbaren Mengen?

(e) Man zeige, daß C eine perfekte Menge ist, d. h.; daß C abgeschlossen und in sich dicht (jeder Punkt aus C ist Häufungspunkt von C) ist.

(f) Schließlich beweise man, daß C nirgends dicht (der Abschluß von C enthält keinen inneren Punkt) ist.

Abgabe: 1. Gruppe: Montag, 26. Mai 2008, zur Übungszeit
2. Gruppe: Dienstag, 27. Mai 2008, zur Übungszeit

---

* Zusatzpunkte