Maß & Integrationstheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

26. Mai 2008

Aufgabe 01

Sei $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum, und

$$\mathcal{M}^\mu := \{A \in M \mid \exists\, A_1, A_2 \in \mathcal{M} : A_1 \subset A \subset A_2 \ \wedge\ \mu(A_1 \triangle A_2) = 0\}$$

a) Zeigen: $\mathcal{M}^\mu$ ist eine σ-Algebra über M.

- Es ist klar dass $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^\mu$ ist, denn für $A \in \mathcal{M}$ ist $A \subset A \subset A$ und $\mu(A \triangle A) = \mu(\emptyset) = 0$ also $A \in \mathcal{M}^\mu$. Somit ist insbesondere auch $M \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M}^\mu$.
- Sei $A \in \mathcal{M}^\mu$, das heißt $\exists\, A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ mit $A_1 \subset A \subset A_2 \ \wedge\ \mu(A_1 \triangle A_2) = 0$. Dann ist $A_2^c \subset A^c \subset A_1^c$ und wegen

$$A_1^c \triangle A_2^c = (A_1^c \setminus A_2^c) \cup (A_2^c \setminus A_1^c) = (A_1^c \cap A_2) \cup (A_2^c \cap A_1) = (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) = A_1 \triangle A_2$$

folgt

$$\mu(A_1^c \triangle A_2^c) = \mu\left(A_1 \triangle A_2\right) = 0$$

Da $A_1^c, A_2^c \in \mathcal{M}$ sind, ist $A^c \in \mathcal{M}^\mu$.
- Seien nun $A_n \in \mathcal{M}^\mu,\ n \in \mathbb{N}$, das heißt $\exists\, A_{n1}, A_{n2} \in \mathcal{M}$ mit $A_{n1} \subset A_n \subset A_{n2} \ \wedge\ \mu(A_{n1} \triangle A_{n2}) = 0$. Nennen

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \ ,\ A_1 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n1} \ ,\ A_2 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n2}$$

und sehen dass $A_1 \subset A \subset A_2$ ist. Da $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist, sind auch $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$. Ferner ist

$$A_1 \triangle A_2 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n1} \triangle A_{n2}$$

denn für $x \in A_1 \triangle A_2$ ist: $x \in A_1 \setminus A_2$ oder $x \in A_2 \setminus A_1$, also:
$x \in A_{n1} \setminus A_2 \ \Rightarrow\ x \in A_{n1} \setminus A_{n2}$ für bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ oder $x \in A_{n2} \setminus A_1 \ \Rightarrow\ x \in A_{n2} \setminus A_{n1}$ für bestimmtes $n \in \mathbb{N}$, also: $x \in A_{n1} \triangle A_{n2}$ für bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ und somit auf jeden Fall $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n1} \triangle A_{n2}$. Somit folgt:

$$\mu\left(A_1 \triangle A_2\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n1} \triangle A_{n2}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu\left(A_{n1} \triangle A_{n2}\right)}_{0} = 0$$

was impliziert: $A \in \mathcal{M}^\mu$.

$\square$

b) Zeigen: Die Erweiterung μ auf $\mathcal{M}^\mu$ definiert als

$$\mu(A) := \mu(A_1) \text{ für } A_1, A_2 \in \mathcal{M},\ A_1 \subset A \subset A_2,\ \mu(A_1 \triangle A_2) = 0$$

ist ein Maß.
Bemerke: In der Vorlesung wurde gezeigt: μ ist wohldefiniert.

- Es ist klar dass $\mu(\emptyset) = 0$ gilt, denn $\underbrace{\emptyset}_{A_1} \subset \emptyset \subset \underbrace{\emptyset}_{A_2}$, $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ und $\mu(A_1 \triangle A_2) = \mu(\emptyset) = 0$.
- Für $B_1 \subset B_2 \subset B_3$ mit $\mu(B_1 \triangle B_3) = 0$ ist auch:

$$\mu(B_2 \triangle B_3) = 0 \ (*)$$

Beweis:

$$\mu(B_2 \triangle B_3) = \mu(\underbrace{B_3 \setminus B_2}_{\subset B_3 \setminus B_1}) \leq \mu(B_3 \setminus B_1) = \mu(B_1 \triangle B_3) = 0$$

- Seien $A_n \in \mathcal{M}^\mu$, $n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt, und $A := \biguplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Dabei gibt es $A_{n1}, A_{n2} \in \mathcal{M}$ mit

$$A_{n1} \subset A_n \subset A_{n2} \ , \ \mu(A_{n1} \triangle A_{n2}) = 0$$

Dann ist:

$$A_1 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n1} \overset{A_{n1} \subset A_n}{\subset} \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}_{A} \overset{A_n \subset A_{n2}}{\subset} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n2} =: A_2$$

$$\mu\left(A_1 \triangle A_2\right) = \mu\left(A_2 \setminus A_1\right) = \mu\left[\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n2}\right) \setminus \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{m1}\right)\right] = \mu\left\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}\left[A_{n2} \setminus \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{m1}\right)\right]\right\}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left[A_{n2} \setminus \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{m1}\right)\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu(A_{n2} \setminus A_{n1})}_{\mu(A_{n1} \triangle A_{n2}) = 0} = 0$$

Da die A_n paarweise disjunkt sind sind natürlich auch die $A_{n1} \subset A_n$ paarweise disjunkt, so dass gilt:

$$\mu(A) = \mu(A_1) = \mu\left(\biguplus_{n \in \mathbb{N}} A_{n1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

das heißt μ ist auf $\mathcal{M}^\mu$ σ-additiv, und somit ein Maß. $\square$

Aufgabe 02

Zu zeigen wäre: $\forall \ \mathcal{N} \in \mathcal{M}^\mu$ mit $\mu(\mathcal{N}) = 0$ gilt: $\forall \ A \subset \mathcal{N} : A \in \mathcal{M}^\mu$.
Sei also $\mathcal{N} \in \mathcal{M}^\mu$ eine Nullmenge und $A \subset \mathcal{N}$ beliebig. Es gibt also $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ mit $A_1 \subset \mathcal{N} \subset A_2$ und $\mu(A_1 \triangle A_2) = 0$. Wir setzen: $A_1' := \emptyset$, $A_2' := A_2$. Es gilt somit $A_1' \subset A \subset \mathcal{N} \subset A_2 = A_2'$ und $A_1', A_2' \in \mathcal{M}$. Ferner ist

$$0 = \mu(A_1 \triangle A_2) \overset{A_1 \subseteq A_2}{=} \mu(A_2 \setminus A_1) = \mu\left[(A_2 \setminus \mathcal{N}) \overset{+}{\cup} (\mathcal{N} \setminus A_1)\right] = \mu(A_2 \setminus \mathcal{N}) + \underbrace{\mu(\underbrace{\mathcal{N} \setminus A_1}_{\subset \mathcal{N}})}_{\leq \mu(\mathcal{N}) = 0} = \mu(A_2 \setminus \mathcal{N})$$

$$\overset{\mu(\mathcal{N}) < \infty}{=} \mu(A_2) - \underbrace{\mu(\mathcal{N})}_{0} = \mu(A_2) = \mu(A_1' \triangle A_2')$$

Somit ist auch $A \in \mathcal{M}^\mu$. Also ist $(M, \mathcal{M}^\mu, \mu)$ vollständig.

Aufgabe 03

Ziegen: Dynkin-System

- Da $|\Omega| = 2n$: gerade, ist auch $\Omega \in \mathcal{D}$
- Sei $A \in \mathcal{D}$, das heißt $|A| = 2k,\ k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist auch $|A^c| = |\Omega \setminus A| = 2(n-k)$, also $A^c \in \mathcal{D}$
- Seien $A_n \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkte Mengen und $A := \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Das heißt $|A_n| = 2k_n\ ,\ k_n \in \mathbb{N}_0$. Da Ω endlich ist, gibt es nur endlich viele, paarweise disjunkte, nicht-leere Mengen $A_n \in \mathcal{D}$. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $A = \biguplus_{n=1}^{N} A_n$. Also ist

$$|A| = \sum_{n=1}^{N} |A_n| = \sum_{n=1}^{N} 2k_n = 2\sum_{n=1}^{N} k_n : \text{gerade}$$

und somit $A \in \mathcal{D}$.

Zeigen: Für $n > 1$ ist $\mathcal{D}$ keine Algebra

Da $n > 1$ (also $|\Omega| > 2$) ist, können wir Elemente $a_1, a_2, a_3 \in \Omega$ wählen. Betrachten wir die Mengen $A := \{a_1, a_2\} \in \mathcal{D}$ und $B := \{a_1, a_3\} \in \mathcal{D}$, so stellen wir fest:

$$A \cup B = \{a_1, a_2, a_3\} \notin \mathcal{D}$$

Somit kann $\mathcal{D}$ keine Algebra, und insbesondere keine σ-Algebra sein. $\square$

Aufgabe 04

a) Sei $A \in \mathcal{M}$ beliebig. Da beide Maße μ_i auf $(M, \mathcal{M})$ endlich sind, gilt nach dem Approximationssatz

$$\sup_{\substack{B\subset A\\ B\in\mathscr{A}_\delta}} \mu_i(B) = \mu_i(A) = \inf_{\substack{B\subset A\\ B\in\mathscr{A}_\sigma}} \mu_i(B)\quad,\ i = 1, 2$$

mit

$$\mathscr{A}_\sigma := \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \mid A_n \subset A_{n+1} \in \mathscr{A} \right\}$$

$$\mathscr{A}_\delta := \left\{ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \mid A_{n+1} \subset A_n \in \mathscr{A} \right\}$$

Wegen $\mu_1 \le \mu_2$ auf $\mathscr{A}$, ist für $\mathscr{A}_\sigma \ni A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ A_n \subset A_{n+1} \in \mathscr{A}$

$$\mu_1(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(A_n) \le \lim_{n\to\infty} \mu_2(A_n) = \mu_2(A)$$

Also ist $\mu_1 \le \mu_2$ auch auf $\mathscr{A}_\sigma$, also

$$\mu_1(A) = \inf_{\substack{B\subset A\\ B\in\mathscr{A}_\sigma}} \mu_1(B) \le \inf_{\substack{B\subset A\\ B\in\mathscr{A}_\sigma}} \mu_2(B) = \mu_2(A)$$

Somit ist $\mu_1 \le \mu_2$ auch auf $\mathcal{M}$. $\square$

b) Betrachten die Algebra

$$\mathscr{A} := \left\{ \biguplus_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \mid -\infty \le a_i \le b_i \le a_{i+1} \le \infty,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

wobei wir definieren: $[-\infty, b) := (-\infty, b)$. In Übungsserie 03 wurde gezeigt: $\mathscr{A}$ ist tatsächlich eine Algebra.

- Sei $\mathcal{M} := \sigma(\mathscr{A})$. Es gilt: $\forall\, a \in \mathbb{R} : \mathscr{A} \not\ni \{a\} \in \mathcal{M}$.
Beweis: Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ ist
$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[a, a + \frac{1}{n}\right)}_{\in \mathscr{A} \subset \mathcal{M}} \in \mathcal{M}$$
Doch es gibt keine Darstellung $\{a\} = \biguplus_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \in \mathscr{A}$ denn jedes Intervall $[a, b)$ ist entweder leer oder enthält überabzählbar viele Elemente. Somit ist insbesondere auch für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$: $[a, b] = [a, b) \cup \{b\} \in \mathcal{M}$ und $(a, b) = [a, b) \setminus \{a\} \in \mathcal{M}$.
- Definieren das Maß
$$\mu_1 := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \delta_{\frac{1}{n}}$$
auf $\mathcal{M}$, wobei δ_x das Dirac-Maß um x sei. Bekanntlich ist jede abzählbare Summe (bzw. Linearkombination) von Maßen wieder ein Maß. Analog definieren auch das Maß
$$\mu_2 := \mu_1 + \delta_0$$
- Diese beiden Maße sind σ-endlich, denn:
$$\mathbb{R} = (-\infty, 0] \overset{+}{\cup} (1, \infty) \overset{+}{\cup} \underbrace{\biguplus_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}_{(0,1]}$$
$$\mu_1((-\infty, 0]) = \mu_1((1, \infty)) = 0\ ,\ \mu_1\left(\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$$
$$\mu_2((1, \infty)) = 0\ ,\ \mu_2((-\infty, 0]) = 1\ ,\ \mu_2\left(\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$$
- Es gilt: $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{A}$. Denn jede Menge $A \in \mathscr{A}$ mit $0 \in A$ enthält auch eine (rechtsseitige) offene Umgebung um 0 (da endliche Vereinigung rechtsseitig offener Mengen). Also gilt für solche A:
$$\mu_1(A) = \sum_{n=n_0}^{\infty} n = \infty = \infty + 1 = \mu_1(A) + \delta_0(A) = \mu_2(A)$$
für genügend großes n_0. Für Mengen A mit $0 \notin A$ gilt ohnehin die Gleichheit der beiden Maße. Somit ist insbesondere auf $\mathscr{A}$: $\mu_1 \geq \mu_2$.
- Doch für die Menge $A = \{0\} \in \mathcal{M}$ ist $\mu_1(A) = 0 < 1 = \mu_2(A)$. Somit ist auf $\mathcal{M}$ nicht mehr $\mu_1 \geq \mu_2$.