Übungen zur Vorlesung
"Maß und Integral"

SS 2008

5. Serie

1. Es sei $(M, \mathcal{M}, m)$ ein beliebiger Maßraum, und $\mathcal{M}^m$ bezeichne die Vervollständigung der σ-Algebra $\mathcal{M}$ bzgl. m. Man zeige: 4 P

   (a) $\mathcal{M}^m$ ist eine σ-Algebra von Teilmengen von M.

   (b) Die in der Vorlesung eingeführte Erweiterung des Maßes m als Mengenfunktion auf $\mathcal{M}^m$ ist wiederum ein Maß.

2. Es sei $(M, \mathcal{M}^m, m)$ die Vervollständigung des Maßraumes $(M, \mathcal{M}, m)$. Man beweise, daß dann $(M, \mathcal{M}^m, m)$ ein vollständiger Maßraum ist. 3 P

3. Es sei Ω eine endliche Menge mit einer geraden Anzahl $2n$ von Elementen. Zeigen Sie, daß das System $\mathcal{D}$ aller Mengen $D \subseteq M$ mit einer geraden Anzahl von Elementen ein Dynkin-System ist. Weisen Sie ferner nach, daß für $n > 1$ das System $\mathcal{D}$ keine Algebra und somit auch keine σ-Algebra ist. 3 P

4.* Es seien m_1 und m_2 endliche Maße auf dem meßbaren Raum $(M, \mathcal{M})$. Weiterhin sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ eine Algebra mit $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$ und 4 P

$$m_1(A) \leq m_2(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Man zeige, daß dann $m_1 \leq m_2$ (d. h., $m_1(A) \leq m_2(A)$ für alle $A \in \mathcal{M}$) erfüllt ist. Man belege durch ein Beispiel, daß die Aussage bereits für σ-endliche Maße m_1 und m_2 nicht mehr gilt.

Abgabe: 1. Gruppe: Montag, 19. Mai 2008, zur Übungszeit
2. Gruppe: Dienstag, 20. Mai 2008, zur Übungszeit

* Zusatzpunkte