

Maß & Integrationstheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

19. Mai 2008

Aufgabe 01

Gegenbeispiel: Für $M = \mathbb{R}$ betrachten die σ -Algebren

$$\mathcal{M}_0 := \{\{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R}, \emptyset\}$$

$$\mathcal{M}_1 := \{\{1\}, \mathbb{R} \setminus \{1\}, \mathbb{R}, \emptyset\}$$

$\mathcal{M}_0$ ist tatsächlich eine σ -Algebra, denn:

- $M \in \mathcal{M}_0$
- Für jedes $A \in \mathcal{M}_0$ ist auch $A^c \in \mathcal{M}_0$.
- Bei der Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{M}_0$ können auch nur wieder Elemente aus $\mathcal{M}_0$ entstehen (klar!)

Das gleiche gilt auch für $\mathcal{M}_1$. Doch zwar ist $\{0\}, \{1\} \in \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 =: \mathcal{M}$ aber

$$\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} \notin \mathcal{M}$$

Somit ist $\mathcal{M}$ keine Algebra und insbesondere keine σ -Algebra.

Aufgabe 02

Sei $\mathcal{A}$ die Algebra aus Aufgabe 01 in Übungsserie 03:

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i) \mid -\infty \leq a_i \leq b_i \leq a_{i+1} \leq \infty, n \in \mathbb{N} \right\}$$

In dieser Serie wurde gezeigt dass $\mathcal{A}$ tatsächlich eine Algebra ist.

Sei nun

$$A = (0, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{n}, \infty \right)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}_{\sigma} \rightarrow A^c = (-\infty, 0]$$

Doch A^c ist nicht in $\mathcal{A}_{\sigma}$, denn: wäre

$$A^c = \bigcup_{i=1}^n A_n, A_n \subset A_{n+1} \in \mathcal{A}$$

dann gäbe es ein A_k mit $0 \in A_k$, das heißt (aufgrund der Darstellung der Elemente in $\mathcal{A}$): $\exists a < b \in \mathbb{R}$ mit $0 \in [a, b) \subset A_k$. Also ist $b > 0$ und somit gibt es noch ein $0 < x \in [a, b) \subset A_k$ (da *offen von Rechts*, z.B. $x := \frac{b}{2}$), was impliziert: $0 < x \in A^c$. Dies ist ein Widerspruch! Somit ist $\mathcal{A}_{\sigma}$ nicht mal eine Algebra, insbesondere keine σ -Algebra. $\square$

Aufgabe 03

Sei $\mathcal{O}$ die Menge aller offenen Mengen in $\mathbb{R}^2$. Nennen für $r \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$:

$${}_r B_\varepsilon^o := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - r| < \varepsilon\} \quad , \quad {}_r B_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = r\}$$

$${}^r B_\varepsilon^o := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y - r| < \varepsilon\} \quad , \quad {}^r B_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = r\}$$

Offensichtlich: ${}_r B_\varepsilon^o, {}^r B_\varepsilon^o$ sind offen, und es gilt:

$${}_r B_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}_r B_{\frac{1}{n}}^o \quad , \quad {}^r B_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^r B_{\frac{1}{n}}^o$$

Aufgrund der Definition von $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{O})$ sind dann ${}_r B_0, {}^r B_0 \in \mathcal{M}$ (da abgeschlossen bzgl. Schnitt abzählbar vieler Mengen). Die Menge $\mathbb{Q}$ ist bekanntlich abzählbar, nummerieren also als $r_1, r_2, \dots \in \mathbb{Q}$ alle rationalen Zahlen. Dann ist auch

$$\mathcal{Q} := \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} {}_r B_0 \cup {}^r B_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} {}_{r_i} B_0 \cup {}^{r_i} B_0 \in \mathcal{M}$$

Außerdem ist $\mathcal{Q} = A^c$, denn: Zum einen ist für jedes $r \in \mathbb{Q} : {}_r B_0, {}^r B_0 \subset A^c$ also $\mathcal{Q} \subset A^c$. Zum anderen ist jedes $(x, y) \in A^c$ (also mit x oder y rational) im entsprechenden ${}_x B_0$ oder ${}^y B_0$ und somit in $\mathcal{Q}$. Also ist $\mathcal{Q}^c = A$. Doch da $\mathcal{M}$ σ -Algebra ist, ist auch $A = \mathcal{Q}^c \in \mathcal{M}$, also Messbar.

Aufgabe 04

Hilfssatz: Für eine nach unten beschränkte Menge $H \subset \mathbb{R}$ und Zahl $r \in \mathbb{R}$ mit $r \leq h \forall h \in H$ gilt:

$$r \leq \inf H$$

Denn für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $h \in H$ mit $r \leq h < \inf H + \varepsilon$. Also $r = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r \leq \inf H + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = \inf H$. Analoges gilt auch für das Supremum einer Menge.

- a) Bezeichnen: $B_n := \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$. Die Folge (B_n) ist monoton wachsend und es gilt: $B_n \subset A_k \forall k \geq n$. Also

$$\mu(B_n) \leq \mu(A_k) \forall k \geq n \Rightarrow \mu(B_n) \leq \inf \{\mu(A_k) \mid k \geq n\}$$

Demnach:

$$\mu\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \stackrel{*}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{\mu(A_k) \mid k \geq n\} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

(*) Stetigkeit von unten.

- b) Bezeichnen: $B_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. Die Folge (B_n) ist monoton fallend und es gilt: $A_k \subset B_n \subset A \forall k \geq n$. Also

$$\infty > \mu(B_n) \geq \mu(A_k) \forall k \geq n \Rightarrow \mu(B_n) \geq \sup \{\mu(A_k) \mid k \geq n\}$$

Das oben genannte Supremum existiert, da für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\mu(A_k) \leq \mu(A) < \infty$. Demnach:

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \stackrel{*}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{\mu(A_k) \mid k \geq n\} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

(*) Stetigkeit von oben da $\mu(B_n) < \infty$.

□