Übungen zur Vorlesung
"Maß und Integral"

SS 2008

4. Serie

1. Es seien $M \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ zwei σ-Algebren über M. Zeigen Sie, daß das System 3 P

$$\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 := \{A \subseteq M : A \in \mathcal{M}_1 \vee A \in \mathcal{M}_2\}$$

im allgemeinen keine σ-Algebra ist.

2. Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra von Teilmengen einer nichtleeren Menge M. Es bezeichne $\mathcal{A}_\sigma$ das System aller Mengen $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit $A_n \in \mathcal{A}$ und $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \geq 1$. Man zeige an Hand von Beispielen, daß $\mathcal{A}_\sigma$ im allgemeinen keine σ-Algebra ist. 3 P

3. Es sei $M = \mathbb{R}^2$. Die σ-Algebra $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ der Borelmengen des $\mathbb{R}^2$ ist definiert als die kleinste σ-Algebra, die das System $\mathcal{G}$ der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ enthält. Ist dann die Menge 3 P

$$A = \{(x, y) : x, y \ \text{ irrational}\}$$

meßbar?

4.* *(Lemma von Fatou für Folgen von Mengen)* Es sei $(M, \mathcal{M}, m)$ ein beliebiger Maßraum. Für eine Folge (A_n) von Teilmengen von M bezeichne 4 P

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m,$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Man zeige:

(a) Gilt $A_n \in \mathcal{M},\ n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} m(A_n).$$

(b) Gilt $A_n \in \mathcal{M},\ n \in \mathbb{N}$, und existiert ein $A \in \mathcal{M}$ mit $A_n \subseteq A, n \in \mathbb{N}$, und $m(A) < +\infty$, so folgt

$$\limsup_{n\to\infty} m(A_n) \leq m(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

Abgabe: 1. Gruppe: Montag, 12. Mai 2008, zur Übungszeit
2. Gruppe: Dienstag, 13. Mai 2008, zur Übungszeit

---

* Zusatzpunkte