Maß & Integrationstheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

5. Mai 2008

Aufgabe 01

Notationen: $[-\infty, b) := [-\infty, b) \cap \mathbb{R} = (-\infty, b)$.
$\biguplus$ bzw. $\overset{+}{\cup}$: Vereinigung paarweiser disjunkter Mengen.

Sei

$$\mathcal{S} := \{[a,b) \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$$

Berechnung von $\alpha(\mathcal{S})$

Betrachten zuerst die Menge

$$\mathscr{A} := \left\{ \left(\biguplus_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \right) \mid -\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty,\ a_i \leq b_i \leq a_{i+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

und zeigen dass $\mathscr{A}$ eine Algebra ist (vgl. Übungsserie 01):

- Es ist $\mathbb{R} = [-\infty, \infty) \in \mathscr{A}$
- Für $A \in \mathscr{A},\ A = \biguplus_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ ist

$$A^c = [-\infty, a_1) \overset{+}{\cup} \left(\biguplus_{i=1}^{n-1} [b_i, a_{i+1}) \right) \overset{+}{\cup} [b_n, \infty) \in \mathscr{A}$$

- Für $A, B \in \mathscr{A},\ A = \biguplus_{i=1}^{n} [a_i, b_i)\ ,\ B = \biguplus_{i=1}^{m} [\alpha_i, \beta_i) \cap \mathbb{R}$ ist auch

$$A \cup B = \left(\biguplus_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \right) \cup \left(\biguplus_{j=1}^{m} [\alpha_j, \beta_j) \right) \cong \bigcup_{i=1}^{k} [c_i, d_i] \in \mathscr{A}\ ,\ c_i \leq d_i \leq c_{i+1}$$

Außerdem ist jede Algebra $\mathcal{A} \supset \mathcal{S}$ abgeschlossen bzgl. endlich vieler Vereinigungen, das heißt es muss $\mathscr{A} \subset \mathcal{A}$ sein! Wegen $\mathcal{S} \subset \mathscr{A}$ ist $\mathscr{A} = \alpha(\mathcal{S})$, das heißt die von $\mathcal{S}$ erzeugte Algebra.

Existenz des gesuchten Inhalts

Sei μ eine nichtnegative Funktion auf $\mathscr{A}$, definiert durch

$$\mu\left(\biguplus_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \right) := \begin{cases} 1 & : \exists\ 1 \leq i \leq n : a_i < 0 \leq b_i \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\mu(\emptyset) = \mu\left([0,0)\right) = 0$.

Sind außerdem $A, B \in \mathscr{A}$ disjunkte Mengen mit $A = \biguplus_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$, $B = \biguplus_{i=1}^{m} [\alpha_i, \beta_i)$, so gilt

$$\forall\ i,j : [a_i, b_i) \cap [\alpha_j, \beta_j) = \emptyset \ \to \nexists\ i,j : a_i < 0 \leq b_i \ \wedge \ \alpha_j < 0 \leq \beta_j$$

woraus folgt

$$\mu\left(A \overset{+}{\cup} B\right) = \mu\left[\left(\left(\biguplus_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\right) \overset{+}{\cup} \left(\biguplus_{j=1}^{m}[\alpha_j,\beta_j)\right)\right)\right] = \begin{cases} 1 & : (\exists\ 1 \leq i \leq n : a_i < 0 \leq b_i) \underbrace{\vee}_{\dot\vee} (\exists\ 1 \leq j \leq m : \alpha_j < 0 \leq \beta_j) \\ \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & : \exists\ 1 \leq i \leq n : a_i < 0 \leq b_i \\ \\ 0 & : \text{sonst} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ll} 1 & : \exists\ 1 \leq j \leq m : \alpha_j < 0 \leq \beta_j \\ \\ 0 & : \text{sonst} \end{array} \right\} = \mu(A) + \mu(B)$$

Müssen jedoch noch zeigen: $\mu(A)$ ist unabhängig von der Darstellung von A. Sei also

$$\mathscr{A} \ni A = \biguplus_{i=1}^{n} [a_i, b_i),\ B = \biguplus_{i=1}^{m} [\alpha_i, \beta_i),\ a_i \leq b_i \leq a_{i+1},\ \alpha_i \leq \beta_i \leq a_{i+1}$$

Annahme: $\mu(A) \neq \mu(B)$, o.B.d.A $\mu(A) = 1,\ \mu(B) = 0$. Das heißt

$$\forall\ i \in \{1,..,n\} : b_i < 0 \ \vee \ a_i \geq 0 \ \to \ \exists\ \varepsilon > 0 : (-\varepsilon, 0) \cap A = \emptyset$$

und

$$\exists\ i \in \{1,..,m\} : \alpha_i < 0 \leq \beta_i \ \to \ \forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ x \in B : x \in (-\varepsilon, 0)$$

Beide Aussagen zusammen implizieren jedoch: $A \neq B$.
Somit ist μ ein Inhalt auf $\mathscr{A}$ der die vorgegebene Eigenschaft erfüllt.

Eindeutigkeit

Seien nun μ_1, μ_2 Inhalte auf $(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ mit der erwähnten Eigenschaft und $A = \biguplus_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \in \mathscr{A}$ beliebig. Dann ist

$$\mu_1(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_1\left([a_i, b_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_2\left([a_i, b_i)\right) = \mu_2(A)$$

Demnach gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{A}$. $\square$

σ-Additivität

μ ist auf $\mathcal{A}$ nicht σ-additiv, denn

$$\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right)\right) = \mu\left([-1,0)\right) = 1 \neq 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

Aufgabe 02

Da μ endlich ist, ist auch $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to [0, \infty)$ endlich. Da die Operation $\triangle$ symmetrisch ist, ist auch $d(\cdot, \cdot)$ symmetrisch. Ferner ist

$$d(A, A) = \mu(A \triangle A) = \mu(\emptyset) = 0 \ \ \forall\ A \in \mathcal{M}$$

Seien nun $A, B, C \in \mathcal{M}$ beliebig. Dann gilt

$$d(A, B) + d(B, C) = \mu(A \Delta B) + \mu(B \Delta D) = \mu\left((A \setminus B) \overset{+}{\cup} (B \setminus A)\right) + \mu\left((B \setminus C) \overset{+}{\cup} (C \setminus B)\right)$$

$$= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(B \setminus C) + \mu(C \setminus B)$$

$$= \mu\left[(A \setminus B) \setminus C\right] + \mu\left[(A \setminus B) \cap C\right] + \mu\left[(B \setminus A) \setminus C\right] + \mu\left[(B \setminus A) \cap C\right]$$

$$+ \mu\left[(B \setminus C) \setminus A\right] + \mu\left[(B \setminus C) \cap A\right] + \mu\left[(C \setminus B) \setminus A\right] + \mu\left[(C \setminus B) \cap A\right]$$

$$\geq \mu\left[(A \setminus B) \setminus C\right] + \mu\left[(B \setminus C) \cap A\right] + \mu\left[(B \setminus A) \cap C\right] + \mu\left[(C \setminus B) \setminus A\right]$$

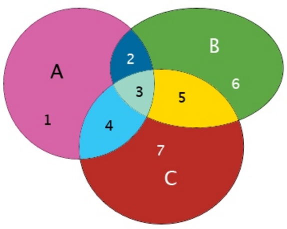
$$\overset{\substack{\text{Alle 4 Mengen}\\ \text{paarweise}\\ \text{disjunkt}}}{=} \quad \mu[((A \setminus B) \setminus C) \overset{+}{\cup} \underbrace{((B \setminus C) \cap A)}_{(A \cap B) \setminus C}] + \mu[\underbrace{((B \setminus A) \cap C)}_{(C \cap B) \setminus A} \overset{+}{\cup} ((C \setminus B) \setminus A)]$$

$$= \mu\left[((A \setminus B) \cup (A \cap B)) \setminus C\right] + \mu\left[((C \cap B) \cup (C \setminus B)) \setminus A\right]$$

$$= \mu(A \setminus C) + \mu(C \setminus A) = \mu\left[(A \setminus C) \overset{+}{\cup} (C \setminus A)\right] = \mu(A \triangle C) = d(A, C)$$

Somit ist d eine Pseudometrik auf $\mathcal{M}$. $\square$

Bemerkung: Die Herleitung für Dreiecksungleichung kann mit Hilfe folgenden Diagramms illustriert werden:



Assoziiert man nämlich die Fläche jedes Segments $S_i,\ i = 1, .., 7$ mit dem Maß $\mu(S_i)$ so ist ersichtlich:

$$\mu(A \triangle C) = \mu(S_1) + \mu(S_2) + \mu(S_7) + \mu(S_5)$$

$$\leq [\mu(S_1) + \mu(S_4) + \mu(S_5) + \mu(S_6)] + [\mu(S_4) + \mu(S_7) + \mu(S_2) + \mu(S_6)] = \mu(A \triangle B) + \mu(B \triangle C)$$

Aufgabe 03

Wegen $\mu_n(\emptyset) = 0 \ \ \forall\ A \in \mathcal{M}$ ist auch

$$\mu(\emptyset) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\mu_n(\emptyset)}_{0} = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$$

Seien $A_m \in \mathcal{M},\ m \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Mengen. Aus der Definition von μ folgt

$$\mu\left(\biguplus_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) = \lim_{n \to \infty} \mu_n\left(\biguplus_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n(A_m)$$

Die (formale) Folge $\mathscr{M}_n := \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n(A_m)$ ist monoton wachsend. Somit konvergiert sie entweder gegen einen Wert $\mathscr{M} \geq 0$ oder gegen ∞. Dies ist insbesondere der Fall wenn $\mathscr{M}_{n_0} = \infty$ ist für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.
Fall: $\lim_{n\to\infty} \mathscr{M}_n = \infty$, das heißt $\forall\ S > 0 : \exists\ n_0(S) \in \mathbb{N} : \mathscr{M}_{n_0} > S$. Da die μ_n monoton wachsend sind folgt

$$\forall\ S > 0 : \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_m) \geq \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{n_0(S)}(A_m) > S$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_m) = \infty = \lim_{n\to\infty} \mathscr{M}_n = \mu\left(\biguplus_{m\in\mathbb{N}} A_m\right)$$

Fall: $\lim_{n\to\infty} \mathscr{M}_n =: \mathscr{M} < \infty$. Dann ist insbesondere $\mathscr{M}_n \leq \mathscr{M}$ reell, und für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\ n \geq n_0 : \mathscr{M}_{n_0} \in [\mathscr{M} - \varepsilon, \mathscr{M}]$$

also auch

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_m) \overset{\substack{\mu_n \text{ monoton} \\ \text{wachsend}}}{\geq} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{n_0}(A_m) = \mathscr{M}_{n_0} \geq \mathscr{M} - \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $\sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_m) \geq \mathscr{M}$ sein. Außerdem gilt:

$$\forall\ N \in \mathbb{N} : \sum_{m=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_m) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{m=1}^{N} \mu_n(A_m)}_{\leq\, \mathscr{M}_n\, \leq\, \mathscr{M}} \leq \mathscr{M} \quad \Rightarrow \quad \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_m) \leq \mathscr{M}$$

und deshalb

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_m) = \mathscr{M} = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n(A_m) = \mu\left(\biguplus_{m\in\mathbb{N}} A_m\right) \quad \square$$

Aufgabe 04

Sei $d(A,B) := \mu(A \triangle B)$ die durch μ induzierte Metrik auf $\mathcal{M}$ (vgl. Aufgabe 02) und

$$\mathscr{K} := \{A \in \mathcal{M} \mid \forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ B \in \mathscr{A} : d(A,B) < \varepsilon\} \subset \mathcal{M}$$

Zeigen: $\mathscr{A} \subset \mathscr{K}$. Ist $A \in \mathscr{A}$ so ist wegen $\mu(A \triangle A) = d(A,A) = 0 < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, das heißt $\mathscr{A} \subset \mathscr{K}$.
Zeigen: $\mathscr{K}$ ist monotone Klasse.

- Seien $A_n \in \mathscr{K},\ n \in \mathbb{N}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ und sei $\tilde{A} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ und $B_{n_0} \in \mathscr{A}$ gilt:

  $$\tilde{A} \triangle B_{n_0} \subset (A_{n_0} \triangle B_{n_0}) \cup \left(\tilde{A} \setminus A_{n_0}\right)$$

  denn sei $X \in \tilde{A} \triangle B_{n_0} = \left(\tilde{A} \setminus B_{n_0}\right) \cup \left(B_{n_0} \setminus \tilde{A}\right)$ beliebig. Im Fall $X \in B_{n_0} \setminus \tilde{A}$ ist insbesondere $X \notin A_{n_0}$ also $X \in A_{n_0} \triangle B_{n_0}$. Im Fall $X \in \tilde{A} \setminus B_{n_0}$ ist entweder $X \in A_{n_0} \ \rightarrow\ X \in A_{n_0} \triangle B_{n_0}$ oder $X \notin A_{n_0} \ \rightarrow\ X \in \tilde{A} \setminus A_{n_0}$. Auf jeden Fall ist $X \in (A_{n_0} \triangle B_{n_0}) \cup \left(\tilde{A} \setminus A_{n_0}\right)$.
  Somit ist

  $$\mu\left(\tilde{A} \triangle B\right) \leq \mu\left[(A_{n_0} \triangle B_{n_0}) \cup \left(\tilde{A} \setminus A_{n_0}\right)\right] \leq \mu\left(A_{n_0} \triangle B_{n_0}\right) + \mu\left(\tilde{A} \setminus A_{n_0}\right)$$

  Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen

  $$\lambda := \mu(\tilde{A}) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A_n)}_{\substack{\text{monoton} \\ \text{wachsend}}} \in \mathbb{R}$$

(Stetigkeit von unten) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{n_0}) \in \left[\lambda - \frac{\varepsilon}{2}, \lambda\right]$. Nach Definition von $\mathscr{K}$ gibt es außerdem ein $B_{n_0} \in \mathscr{A}$ mit $\mu(A_{n_0} \triangle B_{n_0}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Zusammengefasst also:

$$\mu(\tilde{A} \triangle B_{n_0}) \leq \mu\left(A_{n_0} \triangle B_{n_0}\right) + \mu\left(\tilde{A} \setminus A_{n_0}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu(\tilde{A}) - \mu(A_{n_0})}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

das heißt $\tilde{A} \in \mathscr{K}$.

- Seien $A_n \in \mathscr{K},\ n \in \mathbb{N}$ mit $A_{n+1} \subset A_n$ und $\tilde{A} := \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ und $B_{n_0} \in \mathscr{A}$ gilt

$$\tilde{A} \triangle B_{n_0} \subset (A_{n_0} \triangle B_{n_0}) \cup \left(A_{n_0} \setminus \tilde{A}\right)$$

denn sei $X \in \tilde{A} \triangle B_{n_0}$. Im Fall $X \in \tilde{A} \setminus B_{n_0}$ ist insbesondere $X \in A_{n_0} \ \rightarrow\ X \in A_{n_0} \triangle B_{n_0}$. Im Fall $X \in B_{n_0} \setminus \tilde{A}$ ist entweder $X \in A_{n_0} \ \rightarrow\ X \in A_{n_0} \setminus \tilde{A}$ oder $X \notin A_{n_0} \ \rightarrow\ X \in A_{n_0} \triangle B_{n_0}$. Auf jeden Fall ist $X \in (A_{n_0} \triangle B_{n_0}) \cup \left(A_{n_0} \setminus \tilde{A}\right)$, das heißt

$$\mu\left(\tilde{A} \triangle B_{n_0}\right) \leq \left((A_{n_0} \triangle B_{n_0}) \cup \left(A_{n_0} \setminus \tilde{A}\right)\right) \leq \mu\left(A_{n_0} \triangle B_{n_0}\right) + \mu\left(A_{n_0} \setminus \tilde{A}\right)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen

$$\lambda := \mu(\tilde{A}) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\mu(A_n)}_{\substack{\text{monoton}\\ \text{fallend}}} \in \mathbb{R}$$

(Stetigkeit von oben) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{n_0}) \in \left[\lambda, \lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right]$. Nach Definition von $\mathscr{K}$ gibt es außerdem ein $B_{n_0} \in \mathscr{A}$ mit $\mu(A_{n_0} \triangle B_{n_0}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Zusammengefasst also:

$$\mu(\tilde{A} \triangle B_{n_0}) \leq \mu\left(A_{n_0} \triangle B_{n_0}\right) + \mu\left(A_{n_0} \setminus \tilde{A}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu(A_{n_0}) - \mu(\tilde{A})}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

das heißt $\tilde{A} \in \mathscr{K}$.

Somit ist $\mathscr{K}$ eine monotone Klasse, und nach dem Satz über monotone Klassen folgt $\mathcal{M} = \sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{K}$, das heißt $\forall\ A \in \mathcal{M}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $B \in \mathscr{A}$ mit $d(A, B) < \varepsilon$. Das heißt <u>$\mathscr{A}$ ist dicht in $\mathcal{M}$</u>. $\square$