Übungen zur Vorlesung
"Maß und Integral"

SS 2008

3. Serie

1. Es sei $\mathbb{R}$ die reelle Achse und $\mathcal{A}$ die von den Intervallen der Form $[a, b) \cap \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ erzeugte Algebra. Man zeige, daß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ genau ein Inhalt m mit 3 P

$$m([a, b)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a < 0 \leq b, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

existiert. Ist m σ-additiv auf $\mathcal{A}$?

2. Es sei $(M, \mathcal{M}, m)$ ein endlicher Maßraum und

$$d(A, B) = m(A \triangle B), \ A, B \in \mathcal{M}.$$

Man zeige, daß dann $(\mathcal{M}, d)$ ein pseudometrischer Raum ist.
Hinweis: In einem pseudometrischen Raum (E, ρ) braucht im Unterschied zu einem metrischen Raum definitionsgemäß die Bedingung $\rho(x, y) = 0$ nicht $x = y$ zu implizieren. 3 P

3. Es sei $(m_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Maßen auf dem meßbaren Raum $(M, \mathcal{M})$. Es gelte

$$m_n(A) \leq m_{n+1}(A) \ , \ A \in \mathcal{M} \ , \ n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, daß die Mengenfunktion m auf $(M, \mathcal{M})$ mit 3 P

$$m(A) = \lim_{n \to \infty} m_n(A) \ , \ A \in \mathcal{M},$$

wieder ein Maß auf $(M, \mathcal{M})$ ist.

4.* Es sei $(M, \mathcal{M}, m)$ ein Maßraum mit einem endlichen Maß m. Die σ-Algebra $\mathcal{M}$ werde von der Algebra $\mathcal{A}$ erzeugt. Mit Hilfe des Satzes über monotone Klassen zeige man die folgende Approximationseigenschaft: Für alle $A \in \mathcal{M}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $B \in \mathcal{A}$, so daß 4 P

$$m(A \Delta B) < \varepsilon$$

gilt. Was bedeutet diese Aussage im Zusammenhang mit Aufgabe 2 dieser Serie?

Abgabe: 1. Gruppe: Montag, 05. Mai 2008, zur Übungszeit
2. Gruppe: Dienstag, 06. Mai 2008, zur Übungszeit

* Zusatzpunkte