Maß & Integrationstheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

5. Mai 2008

Aufgabe 01

a)
- Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $S_1 \subset S_2$ denn wegen $M \in S_1$ ist

$$\forall\ A \in S_1 : A = A \cup \emptyset = \underbrace{A}_{\in S_1} \cup M^c \in S_2 \ \rightarrow\ S_1 \subset S_2$$

- Induktionsschritt: Sei $A \in S_n$ beliebig. Dann ist auch $M \in S_1 \subset \cdots \subset S_n$ und somit

$$A = A \cup \emptyset = A \cup M^c \in S_{n+1} \ \rightarrow\ S_n \subset S_{n+1} \quad \square$$

b) **Zeigen:** $\mathcal{T} := \bigcup_{i=1}^{\infty} S_n$ **ist Algebra**

Es gilt:

$$\emptyset, M \in S_1 \subset \mathcal{T} \ \rightarrow\ \emptyset, M \in \mathcal{T}$$

Sei nun $A \in \mathcal{T}$, das heißt $\exists\ S_n : A \in S_n$. Wegen $\emptyset \in S_n$ ist $A^c = \emptyset \cup A^c \in S_{n+1} \subset \mathcal{T}$ und somit $A^c \in \mathcal{T}$. Seien nun $A, B \in \mathcal{T}$ beliebig, das heißt $\exists\ n, m \in \mathbb{N} : A \in S_n\ ,\ B \in S_m$ bzw. $\exists\ k \in \mathbb{N} : A, B \in S_k$ (z.B $k := \max\{n, m\}$). Wir haben jedoch gesehen dass dann $B^c \in S_{k+1}$ ist. Daraus folgt aber

$$A \cup B = \underbrace{A}_{\in S_{k+1}} \cup (B^c)^c \in S_{k+2} \subset \mathcal{T} \ \rightarrow\ A \cup B \in \mathcal{T}$$

Somit ist $\mathcal{T}$ eine Algebra.

Zeigen: $S \subset \mathcal{T}$

Es gilt offensichtlich $S \subset S_1 \subset \mathcal{T}$.

Zeigen: Für jede Algebra $\mathcal{P} \supset S$ ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}$.

Sei $\mathcal{P}$ eine Algebra mit $S \subset \mathcal{P}$.

- Es ist auch $\emptyset, M \in \mathcal{P}$ (da $\mathcal{P}$ Algebra) also $S_1 \subset \mathcal{P}$.
- Da $\mathcal{P}$ abgeschlossen bzgl. Komplementbildung ist, muss $\forall\ A \in \mathcal{P}$ gelten: $A^c \in \mathcal{P}$. Ist nun $S_n \subset \mathcal{P}$ so muss auch $S_{n+1} \subset \mathcal{P}$ sein, denn

$$\forall\ A, B \in S_n \subset \mathcal{P} \rightarrow\ B^c \in \mathcal{P} \ \rightarrow\ A \cup B^c \in \mathcal{P}$$

$$\text{Also: } S_{n+1} = \{A \cup B^c \mid A, B \in S_n\} \subset \mathcal{P}$$

Da $S_1 \subset \mathcal{P}$ ist, gilt $\forall\, n \in \mathbb{N} : S_n \subset \mathcal{P}$ woraus folgt

$$\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_n \subset \mathcal{P}$$

Somit ist $\alpha(S) = \mathcal{T}$. $\square$

Aufgabe 02

Betrachten den messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ und die Teilmengenfolge

$$A_n := \left(0, \frac{1}{n}\right]$$

Diese Folge ist natürlich monoton fallend (sogar streng monoton) und es gilt

$$\mathcal{A} := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

denn wäre $x \in \mathcal{A}$, dann müsse insbesondere $x > 0$ sein. Doch dann wäre für ein genügend großes $n \in \mathbb{N} : x > \dfrac{1}{n}$ und somit $x \notin A_n \supset \mathcal{A}$ was ein Widerspruch wäre.
Betrachten die Maßfunktion $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \{0, \infty\}$ definiert als

$$\mu(U) = \begin{cases} \infty & : U \neq \emptyset \\ 0 & : U = \emptyset \end{cases}$$

Dann ist $\mu(A_n) = \infty \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty \neq 0 = \mu(\emptyset)$$

Aufgabe 03

Sei $M := \mathbb{N}$ und $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ der im folgenden betrachtete messbare Raum. Dann definiert die Abbildung

$$\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]\ ,\ \mu(A) := \begin{cases} \infty & : |A| = \infty \\ & \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

einen Inhalt auf $\mathcal{M}$, denn $\mu(\emptyset) = 0$ und für beliebige disjunkte $A, B \in \mathcal{M}$ ist $A \cup B$ genau dann eine unendliche Menge, wenn mindestens eine von beiden A, B unendlich ist. Also

$$\mu(A \cup B) = \left\{ \begin{array}{ll} \infty & : |A| = \infty \;\vee\; |B| = \infty \\ & \\ 0 & : \text{sonst} \end{array} \right\} = \mu(A) + \mu(B)$$

Doch sie ist nicht σ-Additiv, denn

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\right) = \mu(\mathbb{N}) = \infty \neq 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\})$$

Sei nun $(A_n) \subset \mathcal{M}$ eine fallende Folge mit $\mu(A_n) < \infty$ und $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Dann ist insbesondere $\mu(A_n) = 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ und demnach

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$

Aufgabe 04

a) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ eine Folge mit $A_n \subset A_{n+1}$. Dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}\left(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu\left(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\biguplus_{n=1}^{N}\left(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n\right)\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N)$$

wobei "$\biguplus$" die Vereinigung disjunkter Mengen symbolisiere. $\square$

b) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ eine Folge mit $A_{n+1} \subset A_n$ und $\tilde{A} := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Wegen $A_{n_0} \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \tilde{A}$ für $n > n_0$, gilt

$$\infty > \mu(A_{n_0}) \geq \mu(A_n) \geq \mu(A_{n+1}) \geq \mu(\tilde{A})$$

das heißt die reelle Folge $\mu(A_n)$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt, also $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Ferner gilt: $\tilde{A} = \bigcap\limits_{n=m}^{\infty} A_n$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nennen wir $\tilde{A}_n := A_{n_0} \setminus A_n$ für $n \geq n_0$ so ist die Folge $\tilde{A}_n$ monoton wachsend, das heißt $\tilde{A}_n \subset \tilde{A}_{n+1}$. Außerdem ist

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \tilde{A}_n \subset A_{n_0} \ \wedge\ \mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \tilde{A}_n\right) \leq \mu(A_{n_0}) < \infty$$

Somit können wir Teil (a) anwenden und erhalten

$$\mu\left(\tilde{A}\right) = \mu\left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(A_{n_0} \setminus \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \tilde{A}_n\right) \overset{\mu(A_{n_0})<\infty}{=} \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \tilde{A}_n\right) \overset{(a)}{=} \mu(A_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(\tilde{A}_n)}_{\mu(A_{n_0}\setminus A_n)}$$

$$\overset{\mu(A_n)<\infty}{=} \mu(A_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \left[\mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)\right] = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \quad \square$$