Übungen zur Vorlesung
"Maß und Integral"

SS 2008

2. Serie

1. Es sei M eine beliebige nichtleere Menge und $\mathcal{S}$ ein System von Teilmengen von M. Man definiere induktiv 4 P
   $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} \cup \{\phi, M\}$,
   $\mathcal{S}_{n+1} = \{A \cup B^c \ : \ A, B \in \mathcal{S}_n\}, \ n \in \mathbb{N}$
   Man beweise:
   (a) $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$,
   (b) $\alpha(\mathcal{S}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$.

2. Man gebe ein Beispiel für ein Maß m auf einem meßbaren Raum $(M, \mathcal{M})$ an, das nicht stetig in der leeren Menge ist, d. h., daß eine fallende Folge (A_n) meßbarer Mengen mit $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ und $\lim_{n\to\infty} m(A_n) \neq \emptyset$ existiert. 3 P

3. Man finde ein Beispiel für einen Inhalt m auf einem meßbaren Raum $(M, \mathcal{M})$, der kein Maß (also nicht σ-additiv) ist, aber die folgende Eigenschaft besitzt: 3 P
   Für jede fallende Folge (A_n) aus $\mathcal{M}$ mit $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ und $m(A_n) < +\infty, n \geq 1$, gilt $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0$.
   (Diese Eigenschaft ist nämlich umgekehrt für jedes Maß m erfüllt.)

4.* Es sei $(M, \mathcal{M}, m)$ ein beliebiger Maßraum. Man zeige: 4 P

(a) (Stetigkeit von unten) Für jede Folge $(A_n)_{n\geq 1}$ aus $\mathcal{M}$ mit $A_n \subseteq A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt
$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

(b) (Stetigkeit von oben) Für jede Folge $(A_n)_{n\geq 1}$ aus $\mathcal{M}$ mit $A_{n+1} \subseteq A_n, n \in \mathbb{N}$, sowie $m(A_{n_0}) < +\infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt
$$m\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

Abgabe: 1. Gruppe: Montag, 28. April 2008, zur Übungszeit
2. Gruppe: Dienstag, 29. April 2008, zur Übungszeit

* Zusatzpunkte