Maß & Integrationstheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

28. April 2008

Aufgabe 01

a) Seien $x, z \in E$ und x_A, z_A beliebig. Dann setzen: $x'_A, z'_A \in \{x_A, z_A\}$ so dass $\rho(x, x'_A), \rho(z, z'_A)$ jeweils minimal werden. Dann ist

$$\rho(x, x'_A) \leq \rho(x, z'_A) \leq \rho(x, z) + \rho(z, z'_A) \ \rightarrow \ \rho(x, x'_A) - \rho(z, z'_A) \leq \rho(x, z)$$

Analog ist auch $\rho(z, z'_A) - \rho(x, x'_A) \leq \rho(x, z)$. Somit ist:

$$|\rho(x, \{x_A, z_A\}) - \rho(z, \{x_A, z_A\})| \leq \rho(x, z)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\rho(x, A), \rho(z, A)$ Infima sind, gilt

$$\exists \ x_A, z_A \in A : \rho(x, x_A) \in [\rho(x, A), \rho(x, A) + \varepsilon] \ , \ \rho(z, z_A) \in [\rho(z, A), \rho(z, A) + \varepsilon]$$

Betrachten nun $\rho(x, \{x_A, z_A\})$. Ist $\rho(x, z_A) < \rho(x, x_A)$ so gilt

$$\rho(x, A) \leq \rho(x, z_A) < \rho(x, x_A) < \rho(x, A) + \varepsilon$$

Andernfalls ist $\rho(x, \{x_A, z_A\}) = \rho(x, x_A)$. Wie dem auch sei, ist immer

$$\rho(x, \{x_A, z_A\}) \in [\rho(x, A), \ \rho(x, A) + \varepsilon]$$

und analog

$$\rho(z, \{x_A, z_A\}) \in [\rho(z, A), \ \rho(z, A) + \varepsilon]$$

Also gilt

$$|\rho(x, A) - \rho(z, A)| \leq |\rho(x, \{x_A, z_A\}) - \rho(z, \{x_A, z_A\})| + 2\varepsilon \leq \rho(x, z) + 2\varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, muss

$$\boxed{|\rho(x, A) - \rho(z, A)| \leq \rho(x, z)}$$

sein, denn wäre $|\rho(x, A) - \rho(z, A)| = \rho(x, z) + \delta$, $\delta > 0$ so würde schon die Wahl $\varepsilon := \dfrac{\delta}{3}$ zu einem Widerspruch führen.

Gleichmäßige Stetigkeit

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt:

$$\forall \ x, y \in E : \rho(x, y) < \varepsilon \Rightarrow \ |\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y) < \varepsilon$$

Somit ist $\rho(\cdot, A)$ gleichmäßig stetig auf E. $\square$

b) Sei $F \subset E$ und

$$F_r := \{x \in E : \rho(x, F) = 0\}$$

Richtung "$\Rightarrow$"

Sei F abgeschlossen d.h $F_k := E \setminus F$ ist offen. Sei erstmal $v \in F$. Dann ist $\rho(v, F) = \rho(v, v) = 0$ also ist $v \in F_r$ und ferner $F \subset F_r$.
Sei nun $v \in F_r$, d.h $\rho(v, F) = 0$. Wäre $v \in F_k$, dann gäbe es eine Kugel $B_\varepsilon(v) \subset F_k$ also $B_\varepsilon(v) \cap F = \emptyset$. Es gibt also kein $w \in F$ mit $\rho(v, w) < 0 + \varepsilon = \rho(v, F) + \varepsilon$ was ein Widerspruch ist. Somit muss $F \ni v \notin F_k$ sein also $F_r \subset F$, d.h $F = F_r$.

Richtung "$\Leftarrow$"

Sei $F = F_r$. Dann sei $v \in F_k$ beliebig (also $v \notin F_r$). Da $\rho(v, F) =: \varepsilon > 0$ ist, schneidet sich die Kugel $B_{\varepsilon/2}(v)$ nicht mit F (liegt also vollständig in F_k), denn sonst gäbe es ein $w \in B_{\varepsilon/2} \cap F$ mit

$$\rho(v, w) \leq \varepsilon_2 < \varepsilon$$

also wäre ε nicht das Infimum $\rho(v, F)$. Somit ist F_k offen also F abgeschlossen. $\square$

Aufgabe 02

Bemerkung: Es gilt:

- Ist $A \in S_1$ dann ist natürlich auch $A \in S_2$.
- $S_2 \subset S_3$ denn ist $A \in S_2$ dann ist $A = A \cap M = A \cap (\emptyset)^c \in S_3$
- Ist $A \in S_2$ dann ist auch $A^c \in S_3$ denn $A^c = M \cap A^c \in S_3$
- Sind $A_1, .., A_n \in S_2$ dann ist $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i = M \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in S_3$
- Ist $A \in S_3$, dann ist natürlich auch $A \in S_4$.
- Aus oberem folgt: $S \subset S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4$

Zeigen: S_3 **Halbalgebra**

Es ist $M \in S_3$, denn mit $A = M \in S_2, B_1 = \emptyset \in S_2$ ist $\underbrace{A \cap B_1^c}_{M} \in S_3$.

Seien $U_1, .., U_m \in S_3$. Dann gibt es $A_1, B_{11}, .., B_{1n_1}, \ldots, A_m, B_{m1}, .., B_{mn_m} \in S_2$ mit

$$U_i = A_i \cap B_{i1}^c \cap B_{i2}^c \cap \cdots \cap B_{in_i}^c$$

Doch dann ist

$$\bigcap_{i=1}^{m} U_i = \bigcap_{i=1}^{m} A_i \cap \bigcap_{j=1}^{n_i} B_{ij}^c = \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i \right)}_{=:A \in S_2} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{n_m} B_{ij}^c \right) \in S_3$$

Sei schließlich

$$W = A \cap B_1^c \cap \cdots \cap B_n^c \in S_3 \ , \ \ A, B_i^c \in S_2$$

beliebig. Induktion über n. Für $n = 1$ ist

$$W^c = (A \cap B_1^c)^c = A^c \cup B_1 = A^c \overset{+}{\cup} (A \cap B_1)$$

wobei $\overset{+}{\cup}$ die Vereinigung disjunkter Mengen bedeuten soll. Induktionsschritt: Sei $n > 1$, dann ist

$$W^c = A^c \cup B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1} \cup B_n = (A^c \cup B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}) \overset{+}{\cup} [(A^c \cup B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1})^c \cap B_n]$$

$$= \left(A \cap B_1^c \cap \cdots \cap B_{n-1}^c\right)^c \overset{+}{\cup} \left[\left(A \cap B_1^c \cap \cdots \cap B_{n-1}^c\right) \cap B_n\right] = \left(A \cap B_1^c \cap \cdots \cap B_{n-1}^c\right)^c \overset{+}{\cup} \underbrace{[\underbrace{(B_n \cap A)}_{\in S_2} \cap B_1^c \cap \cdots \cap B_{n-1}^c]}_{=:U_0 \in S_3}$$

Doch nach Induktionsvorraussetzung ist

$$\left(A \cap B_1^c \cap \cdots \cap B_{n-1}^c\right)^c$$

als Vereinigung, endlich vieler disjunkter Mengen $U_1, .., U_k \in S_3$ darstellbar, also

$$W^c = U_1 \overset{+}{\cup} \ldots \overset{+}{\cup} U_k \overset{+}{\cup} U_0$$

□

Zeigen: S_4 ist eine Algebra

Es ist $A \neq \emptyset$. Beweis: Es ist $M \in S_1 \subset S_4$ also $S_4 \neq \emptyset$.
Ist $A \in S_4$, d.h

$$A = \biguplus_{i=1}^{p} W_i \ , \ W_i \in S_3$$

dann ist auch $A^c \in S_4$. Beweis: Nach obigem Beweis können wir schreiben

$$A^c = \bigcap_{i=1}^{p} W_i^c = \bigcap_{i=1}^{p} \biguplus_{j=1}^{n_i} U_{ij}, \ U_{ij} \in S_3$$

Doch die Operationen $\overset{+}{\cup}, \cap$ gehorchen den Assoziativ- und Distributivgesetzen so dass sich A^c wieder als eine (endliche) Vereinigung (disjunkter) Mengen V_i darstellen lässt. Doch diese V_i sind genau Schnitte zwischen den Mengen $U_i \in S_3$ also auch wieder in S_3 (da S_3 Halbalgebra). Somit ist insgesamt $A^c \in S_4$.
Ferner seien $A, B \in S_4$ d.h

$$A = \biguplus_{i=1}^{p} A_i \ , \ B = \biguplus_{j=1}^{q} B_j$$

Dann ist

$$A \cap B = \left(\biguplus_{i=1}^{p} A_i\right) \cap \left(\biguplus_{j=1}^{q} B_j\right) = \biguplus_{i=1}^{p} \biguplus_{j=1}^{q} \underbrace{A_i \cap B_j}_{\in S_3} \in S_4$$

Wegen A^c, B^c und somit auch $A^c \cap B^c$ ist folglich

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in S_4$$

Somit ist gezeigt: $\underline{\text{ } S_4 \text{ ist eine Algebra über } M.}$

Zeigen: S_4 ist *kleinste* Algebra die S enthält

Müssen zeigen: Ist $\mathcal{K}$ eine Algebra über M mit $S \subset \mathcal{K}$, so ist $S_4 \subset \mathcal{K}$.
Da $\mathcal{K}$ eine Algebra ist, ist sie insbesondere nicht leer. Also sei $A \in \mathcal{K}$. Dann muss auch $M = A \cup A^c \in \mathcal{K}$ und $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{K}$ sein. Da sie aber auch S enthält enthält sie $S \cup \{\emptyset, M\} = S_1$. Da sie abgeschlossen gegenüber Bildung endlicher Durchschnitte ist, ist insbesondere

$$S_2 = \left\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i \mid A_i \in S_1 \ , \ n \geq 1\right\} \subset \mathcal{K}$$

Da für jedes $B_i \in \mathcal{K}$ auch $B_i^c \in \mathcal{K}$ sein muss, gilt ähnlich

$$S_3 = \{A \cap B_1^c \cap \cdots \cap B_n^c \mid A, B_i \in S_2 \ , \ n \geq 1\} \subset \mathcal{K}$$

Außerdem muss $\mathcal{K}$ abgeschlossen gegenüber endlicher Vereinigungen von Elementen (insbesondere aus S_3) sein, also

$$S_4 = \left\{ A = \biguplus_{i=1}^{p} A_i \mid A_i \in S_3 \text{ und paarweise disjunkt} \right\} \subset \left\{ A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i \mid A_i \in S_3 \right\} \subset \mathcal{K}$$

Somit ist $S_4 \subset \mathcal{K}$.
Haben also gezeigt:

- S_4 ist eine Algebra über M.
- Für beliebige Algebra $\mathcal{K}$ über M ist $S_4 \subset \mathcal{K}$.
- Es ist $S \subset S_4$.

Somit ist $S_4 = \alpha(S)$. $\square$

Aufgabe 03

a) Bezeichnen

$$V := \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \subset \{1, .., n\} \right\}$$

und für eine beliebige Indexmenge $I \subset \{1, .., n\}$ das Komplement $I^c := \{1, .., n\} \setminus I$.

Zeigen: V ist eine Algebra.
Da S eine Zerlegung von M ist, gilt

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in V$$

Ist ferner $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i \in V$, so ist auch

$$A^c = \bigcup_{i \in I^c} A_i \in V$$

Sind

$$A = \biguplus_{i \in I_1} A_i \in V \ , \ B = \biguplus_{i \in I_2} A_i \in V$$

so ist auch

$$A \cup B = \left(\biguplus_{i \in I_1} A_i \right) \cup \left(\biguplus_{i \in I_2} A_i \right) = \biguplus_{i \in I_1 \cup I_2} A_i \in V$$

Somit ist V eine Algebra.

Zeigen: $S \subset V$: Klar!

Zeigen: Jede Algebra $\mathcal{A}$ über M die S enthält enthält auch V.
Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über M mit $S \subset \mathcal{A}$. Da $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, ist sie abgeschlossen bzgl. endlicher Vereinigungen von Elementen, insbesondere von Elementen aus S. Somit muss

$$V = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \subset \{1, .., n\} \right\} \subset \mathcal{A}$$

sein.
Also ist V die kleinste, S enthaltende Algebra über M und ist insbesondere endlich, mit $|V| = 2^n$.

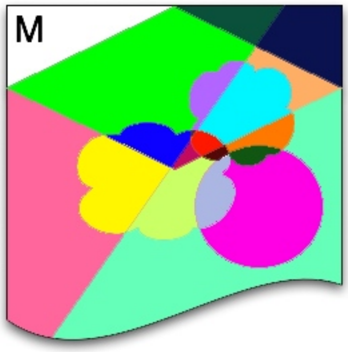
b) Sei

$$\mathcal{A} = \{A_1, .., A_n\}$$

die endliche Algebra über M. Definieren die Menge

$$S := \left\{ U_I := \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i \in I^c} A_i \right) \mid I \subset \{1, .., n\} \right\} = \left\{ U_I := \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in I^c} A_i^c \right) \mid I \subset \{1, .., n\} \right\} \subset \mathcal{A}$$

und zeigen dass S eine endliche Zerlegung von M ist mit $\mathcal{A} = \alpha(S)$.
Bemerkung: Die Elemente $U_i \in S$ sind genau die Atome von $\mathcal{A}$. Eine illustrative Plausibilitätserklärung kann man sich in folgender Darstellung von Punktmengen überlegen:



Dabei ist jede Figur (bzw. "meta-Figur") eine Menge in $\mathcal{A}$ und jede Farbe ein "Atom", erzeugt durch genau die Vorschrift wie in S. Das zu $x \in M$ gehörende Atom ist gegeben durch

$$A(x) = \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ x \in B}} B$$

Zeigen: S ist endliche Zerlegung von M.
Es ist zum einen $|S| \leq n$ (also endlich) da $S \subset \mathcal{A}$. Zum anderen sind alle Mengen $A \neq B \in S$ disjunkt. Sei nämlich

$$A = \left(\bigcap_{i \in I_1} A_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i \in I_1^c} A_i \right) \in S \quad , \quad B = \left(\bigcap_{i \in I_2} A_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i \in I_2^c} A_i \right) \in S$$

und $x \in A \cap B$. Dann folgt

$$x \in \left(\bigcap_{i \in I_1} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in I_2} A_i \right) = \bigcap_{i \in I_1 \cup I_2} A_i \quad \wedge \quad x \notin \left(\bigcup_{i \in I_1^c} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I_2^c} A_i \right) = \bigcup_{i \in I_1^c \cup I_2^c} A_i$$

Annahme: $\exists\, k \in (I_1 \cup I_2) \;\wedge\; k \in (I_1^c \cup I_2^c) \;\rightarrow\; x \in A_k \;\wedge\; x \notin A_k$ Widerspruch! $\rightarrow\; (I_1 \cup I_2) \cap (I_1^c \cup I_2^c) = \emptyset$

Annahme: $\exists\, k \notin (I_1 \cup I_2) \;\wedge\; k \notin (I_1^c \cup I_2^c) = (I_1 \cap I_2)^c \supset (I_1 \cup I_2)^c$ Widerspruch! $\rightarrow\; (I_1 \cup I_2) \cup (I_1^c \cup I_2^c) = M$

$\Rightarrow\; I_1 \cup I_2 = (I_1^c \cup I_2^c)^c = I_1 \cap I_2 \;\rightarrow\; I_1 = I_2 \;\rightarrow\; A = B$ Widerspruch!

und somit A, B disjunkt. Ferner sei $x \in M$ beliebig und

$$\mathcal{I}(x) := \{i \in \{1, .., n\} \mid x \in A_i \in \mathcal{A}\}$$

Dann ist

$$x \in \underbrace{\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}^c} A_i \right)}_{=:U} \in S \quad (U \neq \emptyset \text{ da mindestens } M \in \mathcal{A} \text{ ist})$$

d.h $\exists\, U \in S$ mit $x \in U$. Somit ist

$$M \subset \bigcup_{U \in S} U$$

Da sowieso gilt $\bigcup\limits_{U \in S} U \subset M$ ist

$$M = \bigcup_{U \in S} U$$

Somit ist S eine endliche Zerlegung von M.

Zeigen: $\mathcal{A} = \alpha(S)$.
Sei V wie vorhin im Zusammenhang mit S definiert. Dann ist $V = \alpha(S)$. Da $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, ist Sie geschlossen gegenüber endlichen Vereinigungen, Durchschnittbildungen und Komplementbildungen. Somit ist durch die Definition von S und $\alpha(S)$ ersichtlich dass schon mal $\alpha(S) \subset \mathcal{A}$ gilt (da $S \subset \mathcal{A}$).

Sei nun $A_k \in \mathcal{A}$. Dann ist

$$A_k = \biguplus_{\substack{U \in S \\ U \subset A_k}} U =: S_k \in \alpha(S)$$

denn zum einen ist $S_k \subset A_k$ (folgt unmittelbar aus der Definition von S_k) und zum anderen ist $A_k \subset S_k$ denn:
Sei $x \in A_k$. Da S Zerlegung von M ist, gibt es genau ein (Modul) $U_x \in S$ mit $x \in U_x$, und dies ist darstellbar als

$$U_x = \left(\bigcap_{\substack{A_i \in \mathcal{A} \\ x \in A_i}} A_i \right) \setminus \left(\bigcup_{\substack{A_i \in \mathcal{A} \\ x \notin A_i}} A_i \right) \in S$$

Doch für jedes $y \in U_x$ muss gelten: Ist $x \in A_i$ so ist auch $y \in A_i$ da U_x nur aus Elementen von Teilmengen A_i mit $x \in A_i$ besteht. Somit ist insbesondere $y \in A_k$ da $x \in A_k$, das heißt $U_x \in A_k$. Doch somit ist $x \in U_x \subset S_k$ (aufgrund der Definition von S_k) also $A_k \subset S_k$ bzw. $A_k = S_k \in \alpha(S)$. Also ist $\mathcal{A} \subset \alpha(S)$

Somit ist gezeigt: $\mathcal{A} = \alpha(S)$.

Eindeutigkeit der Zerlegung

Seien $S = \{S_1, ..S_n\}$ und $S' = \{S'_1, ..., S'_m\}$ zwei endliche Zerlegungen von M mit $\alpha(S) = \mathcal{A} = \alpha(S')$. Dann gilt nach Teil (a):

$$\alpha(S) = \left\{ \biguplus_{i \in I} S_i \mid I \subset \{1, .., n\} \right\} = \mathcal{A} = \alpha(S') = \left\{ \biguplus_{i \in I} S'_i \mid I \subset \{1, .., m\} \right\}$$

wobei $S_i \cap S_j = \emptyset = S'_i \cap S'_j$ für alle $i \neq j$ ist. Sei nun $S_a \in S \subset \alpha(S) = \alpha(S')$ beliebig. Dann gibt es eine Indexmenge $I \subset \{1, .., m\}$ mit

$$S_a = \biguplus_{i \in I} S'_i \ , \ \ S'_i \neq \emptyset$$

und umgekehrt für jedes $S'_i,\ i \in I$ gibt es eine Indexmenge $I_i \in \{1, .., n\}$ mit

$$S'_i = \biguplus_{j \in I_i} S_j$$

also

$$S_a = \biguplus_{i \in I} \biguplus_{j \in I_i} S_j$$

Doch aufgrund der Definition einer Zerlegung muss $\bigcup\limits_{i \in I} I_i = \{a\}$ sein. Dies bedeutet insbesondere dass für alle $i \in I$ gilt: $S'_i = S_a$ oder $S'_i = \emptyset$ (zweites ist ausgeschlossen) und demnach gibt es für jedes $S_a \in S$ ein $S'_a \in S'$ mit $S_a = S'_a$. Also ist $S \subset S'$. Analog zeigt man auch $S' \subset S$ und somit $S = S'$. $\square$

Aufgabe 04

Richtung "$\Rightarrow$"

Sei E separabel, d.h es gibt eine abzählbare Menge

$$\mathcal{M} = \{x_1, x_2, ...\} \subset E$$

so dass

$$\forall\, y \in E : \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, x \in \mathcal{M} : y \in B^o_\varepsilon(x) \quad , \quad B^o_\varepsilon(x) : \text{offene Kugel um } x \text{ mit dem Radius } \varepsilon$$

Betrachten die Menge:

$$\mathcal{B} := \{B^o_\varepsilon(x) \mid x \in \mathcal{M} \ , \ 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}\} \subset \mathcal{T}$$

Sei nun $\Omega \in \mathcal{T}$, das heißt Ω ist offen. Sei $y \in \Omega$ beliebig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass $B^o_\varepsilon(y) \subset \Omega$ und ein $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\delta \in \mathbb{Q}$. Da E separabel ist, gibt es ein $x \in \mathcal{M}$ mit $y \in B^o_\delta(x) \in \mathcal{B}$. Doch es ist außerdem $B^o_\delta(x) \subset B^o_\varepsilon(y)$ denn für alle $z \in B^o_\delta(x)$ gilt:

$$\rho(z,y) \leq \underbrace{\rho(z,x)}_{<\delta} + \underbrace{\rho(x,y)}_{<\delta} < 2\delta < \varepsilon \ \rightarrow \ z \in B^o_\varepsilon(y)$$

Somit gibt es für jedes $y \in \Omega \in \mathcal{T}$ ein Element $B^o_\delta(x) \in \mathcal{B}$ mit $y \in B^o_\delta(x) \subset \Omega$. $\mathcal{B}$ ist also eine Basis für $\mathcal{T}$. Diese ist sogar abzählbar: Betrachten dazu beliebige Bijektionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (diese existieren da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar sind) und die Injektion

$$h : \mathcal{B} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \ , \ B^o_\varepsilon(x_i) \overset{h}{\mapsto} (\varepsilon, i)$$

Bemerke: g ist keine Bijektion, da es durchaus zwei $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \in \mathbb{Q}$ geben kann mit $B^o_{\varepsilon_1}(x) = B^o_{\varepsilon_2}(x)$. Doch sie ist injektiv, denn für verschiedene Kugeln in $\mathcal{B}$ muss Radius und/oder Mittelpunkt verschieden sein.
Dann ist die Verknüpfung

$$\mathcal{L}(B) := g\left[f\left((h(B))_1\right), \ (h(B))_2\right]$$

auch injektiv. Somit ist $\mathcal{B}$ abzählbar.

Richtung "$\Leftarrow$"

Sei

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ..\}$$

eine abzählbare Basis für $\mathcal{T}$, das heißt

$$\forall\, \Omega \in \mathcal{T} : \forall\, x \in \Omega : \exists\, B \in \mathcal{B} : x \in B \subset \Omega$$

Assoziieren mit jedem $B_i \neq \emptyset$ ein Element $x_i \in B_i$ und nennen

$$\mathcal{X} := \{x_1, x_2, ...\}$$

Da $\mathcal{B}$ abzählbar ist, ist natürlich auch $\mathcal{X}$ abzählbar.
Seien $y \in E$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Betrachten die offene Kugel $B^o_\varepsilon(y) \in \mathcal{T}$. Dann gibt es eine offene (nichtleere) Menge $B_i \in \mathcal{B}$ mit

$$y \in B_i \subset B^o_\varepsilon(y)$$

Doch da auch $x_i \in B_i \subset B^o_\varepsilon(y)$ ist, folgt $\rho(x_i, y) < \varepsilon$. Somit ist $\mathcal{X}$ dicht. $\square$