Übungen zur Vorlesung
"Maß und Integral"

SS 2008

1. Serie

1. Es sei (E, ρ) ein metrischer Raum und $A \subseteq E$. Es bezeichne 4 P

$$\rho\,(x, A) = \inf_{y \in A} \rho\,(x, y),\ \ x \in E.$$

   (a) Man zeige die Ungleichung

   $$|\rho\,(x, A) - \rho\,(z, A)| \leq \rho\,(x, z),\ \ x, z \in E,$$

   und schlußfolgere daraus, daß die Funktion $\rho\,(\cdot, A)$ auf E gleichmäßig stetig ist.

   (b) Man zeige, daß eine Teilmenge F von E genau dann abgeschlossen ist, wenn

   $$F = \{x \in E : \rho\,(x, F) = 0\}$$

   gilt.

2. Es sei $\mathcal{S}$ ein beliebiges Mengensystem von Teilmengen einer nichtleeren Menge M. Man setze 4 P

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} \cup \{\emptyset, M\},$$
$$\mathcal{S}_2 = \{A_1 \cap \ldots \cap A_n : A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}_1,\ n \geq 1\}.$$

Dann ist $\mathcal{S}_2$ abgeschlossen gegenüber der Bildung endlicher Durchschnitte. Weiterhin sei

$$\mathcal{S}_3 = \{A \cap B_1^c \cap \ldots \cap B_n^c : A, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{S}_2, n \geq 1\}.$$

Man zeige, daß $\mathcal{S}_3$ eine Halbalgebra ist (d. h., $\mathcal{S}_3$ enthält M, ist abgeschlossen gegenüber der Bildung endlicher Durchschnitte, und das Komplement jeder Menge aus $\mathcal{S}_3$ ist darstellbar als Vereinigung endlich vieler paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{S}_3$). Schließlich sei

$$\mathcal{S}_4 = \{A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i : A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{S}_3 \text{ und paarweise disjunkt}\}.$$

Man beweise

$$\mathcal{S}_4 = \alpha(\mathcal{S}).$$

Dabei bezeichnet $\alpha(\mathcal{S})$ die kleinste Algebra von Teilmengen von M, die $\mathcal{S}$ enthält.

3. Es sei M eine beliebige nichtleere Menge 4 P

   (a) Für eine endliche Zerlegung $\mathcal{S} = \{A_1, \cdots, A_n\}$ von M zeige man, daß die von $\mathcal{S}$ erzeugte Algebra $\alpha(\mathcal{S})$ endlich ist und die Gestalt

   $$\alpha(\mathcal{S}) = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \ : \ I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\} \right\}$$

   besitzt.

   (b) Es sei jetzt $\mathcal{A}$ eine beliebige endliche Algebra von Teilmengen von M. Man beweise, daß dann eine eindeutig bestimmte endliche Zerlegung $\mathcal{S}$ von M mit

   $$\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{S})$$

   existiert.
   Hinweis: Die Elemente der gesuchten Zerlegung $\mathcal{S}$ werden von den Atomen von $\mathcal{A}$ gebildet. Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt Atom von $\mathcal{A}$, wenn $A \neq \phi$ gilt und für alle $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq A$ entweder $B = \phi$ oder $B = A$ folgt. Für jedes $m \in M$ existiert ein eindeutig bestimmtes Atom $A(m)$ von $\mathcal{A}$ mit der Eigenschaft $m \in A(m)$.

4.* Es sei (E, ρ) ein metrischer Raum, und es bezeichne 4 P

$$\mathcal{T} = \{G \subseteq E : G \text{ offen}\}$$

die von (E, ρ) induzierte Topologie. Man beweise: (E, ρ) ist genau dann separabel, wenn die Topologie $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis besitzt.
(Ein Teilsystem $\mathcal{B}$ von $\mathcal{T}$ heißt Basis der Topologie $\mathcal{T}$, falls sich jede Menge $G \in \mathcal{T}$ als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ darstellen läßt.)

Abgabe: 1. Gruppe: Montag, 21. April 2008, zur Übungszeit
2. Gruppe: Dienstag, 22. April 2008, zur Übungszeit

---

* Zusatzpunkte