Maß & Integrationstheorie

FSU Jena - SS 2008
Klausur

Dozent: Prof. Engelberg

21 Juli, 2008

Aufgabe 01

a) (2 P.) Geben Sie die Definition eines Dynkin-Systems!

b) (3 P.) Formulieren Sie den Satz über Dynkin-Systeme!

c) (4 P.) Formulieren Sie den Eindeutigkeitssatz für endliche Maße und geben Sie einen Beweis!

Aufgabe 02

Es sei $(M, \mathcal{M})$ ein beliebiger Maßraum.

a) (2 P.) Wie ist das Integral $\int\limits_M f \, dm$ für nicht-negative einfache Funktionen definiert?

b) (3 P.) Erweitern Sie das Integral $\int\limits_M f \, dm$ auf beliebige nicht-negative messbare Funktionen f und skizzieren Sie dabei wesentliche Schritte!

c) (4 P.) Formulieren und beweisen Sie den Satz von B. Levi über monotone Konvergenz!

Aufgabe 03

a) (2 P.) Führen Sie das Lebesque-Maß λ auf der reellen Achse $\mathbb{R}$ ein. Begründen Sie stichpunktartig Existenz und Eindeutigkeit.

b) (2 P.) Gegeben sei ein Verschiebungsinvariantes Maß m auf der reellen Achse mit $m([0,1]) = 1$. Zeigen Sie, dass $m = \lambda$ gilt!

c) (2 P.) Wie ist das Lebesque-Maß λ^n auf $\mathbb{R}^n$ definiert?

d) (2 P.) Es sei $H \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum mit $\dim(H) < n$. Beweisen Sie: $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda^n(H) = 0$.

Aufgabe 04

Auf einem messbaren Raum $(M, \mathcal{M})$ seien beliebige Maße μ und m gegeben.

a) (2 P.) Wie sind die absolute Stetigkeit von μ bzgl. m sowie die Singularität von μ und m definiert?

b) (2 P.) Was ist eine Dichtefunktion von μ bzgl. m?

c) (2 P.) Formulieren Sie den Satz von Radon-Nykodym!

d) (2 P.) Das Maß μ besitze eine Dichtefunktion f bzgl. des Maßes m. Es sei g eine nicht-negative messbare Funktion auf $(M, \mathcal{M})$. Wie kann dann $\int\limits_M g\ dm$ unter Benutzung des Maßes m berechnet werden? Geben sie den Beweis der Formel!

Aufgabe 05

Es sei M eine überabzählbare Menge.

a) (2 P.) Zeigen Sie, dass das Mengensystem $\mathcal{M}$ mit

$$\mathcal{M} = \{A \subset M : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra von Teilmengen von M darstellt!

b) (2 P.) Betrachten Sie die Mengenfunktion m auf $(M, \mathcal{M})$, definiert für $A \in \mathcal{M}$ durch

$$m(A) = \begin{cases} 0 & : A \text{ abzählbar} \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases}$$

und beweisen Sie, dass m ein Maß auf $(M, \mathcal{M})$ ist!

c) (4 P.) Charakterisieren Sie die messbaren (erweitert reellen) Funktionen auf $(M, \mathcal{M})$.

d) (2 P.) Untersuchen Sie für eine messbare Funktion f auf $(M, \mathcal{M})$ die Existenz des Integrals $\int\limits_M f\ dm$ und die Integrierbarkeit von f bzgl. m. Berechnen sie $\int\limits_M f\ dm$.

Gesamtzahl der Punkte: 43
Basis für die Bewertung: 33

Die Klausur ist mit einer Punktzahl ≥ 16 bestanden.