Maß– und Integrationstheorie 2007

Prüfungsklausur

1. Es sei ν ein Maß auf einem meßbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und $f : \Omega \to [0, \infty)$ sei eine meßbare Funktion.

   (a) Zeigen Sie, dass durch
   $$\mu(A) := \int_A f(\omega)\, \mathrm{d}\nu(\omega)$$
   ein Maß μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert wird. 2P

   (b) Charakterisieren Sie Funktionen f für die man $\nu \ll \mu$ hat (Begründung). 2P

2. Die Eulersche Betafunktion ist durch
   $$B(x, y) := \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\, \mathrm{d}u\,, \quad 0 < x, y < \infty\,,$$
   definiert. Zeigen Sie, dass aus $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für zwei Zahlen $x, y > 0$ stets auch $\lim_{n\to\infty} B(x_n, y_n) = B(x, y)$ folgt. 3P

3. Gegeben seien Maße μ_n auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mu_1(A) \le \mu_2(A) \le \cdots$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

   (a) Zeigen Sie, dass durch
   $$\mu(A) := \sup_n \mu_n(A)\,, \quad A \in \mathcal{A}\,,$$
   ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert wird. 2P

   (b) Man beweise, dass für eine meßbare reellwertige Funktion f genau dann die Aussage $f \in L_1(\Omega, \mu)$ gilt, wenn man $\sup_n \int_\Omega |f|\, \mathrm{d}\mu_n < \infty$ hat. 2P

   (c) Falls f μ–integrabel ist, so zeige man 1P
   $$\int_\Omega f\, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\, \mathrm{d}\mu_n\,.$$

4. Berechnen Sie direkt mit Hilfe der Definition des Lebesgue–Integrals $\int_0^1 e^{-x}\, \mathrm{d}\lambda_1(x)$. 3P
   Hinweis: Zur Berechnung des auftretenden Grenzwerts kann man z.B. die Regel von l'Hospital benutzen.

5. Auf $[0, 1] \times \mathbb{N}$ (hier sei $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$) sei die Funktion f durch
   $$f(x, n) = x^n$$
   definiert. λ_1 sei das Lebesguemaß auf $[0, 1]$ und μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$. Man berechne
   $$\int_{[0,1]\times\mathbb{N}} f(x, n)\, \mathrm{d}(\lambda_1 \otimes \mu)(x, n)$$
   und begründe die Rechnung. 2P

6. (a) Für meßbare Funktionen f_n, f von Ω nach $\mathbb{R}$ gelte $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Man zeige, dass für eine gleichmäßig stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch $h(f_n) \xrightarrow{\mu} h(f)$ folgt. Bekanntlich heißt h gleichmäßig stetig, wenn zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ stets $|h(x) - h(y)| < \varepsilon$ folgt. 2P

   (b) $(\star)$ Man zeige die Aussage von (a) für **endliches** μ und eine **stetige** (nicht notwendig gleichmäßig stetige) Funktion h. 2*P

* 19+2* P

*Note **5**: 0.0 bis 7.0 Punkte, Note **4**: 7.5 bis 10.0 Punkte, Note **3**: 10,5 bis 13.0 Punkte, Note **2**: 13.5 bis 16.0 Punkte, Note **1**: 16.5 bis 21.0 Punkte
Klausureinsicht: Am 06.08.07 von 10.00 bis 12.00 Uhr im Raum 3515
Nachklausur: 16.10.07, 10.00 Uhr im SR 113, CZ–Straße