Maß & Integrationstheorie

FSU Jena

Zusatzaussagen

Stilianos Louca

20. Juli 2008

Aussage über σ-Algebren

Jede σ-Algebra $\mathcal{M}$ über M besitzt entweder überabzählbar viele oder nur endlich viele Elemente.

Beweis durch Widerspruch

Annahme: $|\mathcal{M}| = |\mathbb{N}|$.
Definieren für $x \in M$ die Menge

$$M_x := \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{M} \\ x \in B}} B$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Für $x \in M$ ist $x \in M_x$ und somit $M_x \neq \emptyset$.
Beweis: Offensichtlich ist $x \in M \in \mathcal{M}$ und $x \in B \ \forall\ B \in \mathcal{M} : x \in B$.

(ii) Es ist $M_x \in \mathcal{M}$.
Beweis: Wegen $|\mathcal{M}| = |\mathbb{N}|$ setzt sich M_x als Schnitt von <u>höchstens</u> abzählbar vielen messbaren Mengen zusammen, und ist somit selbst messbar.

(iii) Ist $x \notin M_z$ so folgt $M_x \cap M_z = \emptyset$
Beweis: Wegen $x \notin M_z$ ist $x \in \underbrace{M_x \setminus M_z}_{\in \mathcal{M}}$ also per Definition von $M_x : M_x \subset M_x \setminus M_z$. Doch dies kann nur der Fall sein, wenn $M_z \cap M_x = \emptyset$.

(iv) Es ist $M_x \cap M_z \neq \emptyset$ genau dann wenn $M_x = M_z$.
Beweis: Die eine Richtung ist trivial. Sei nun $M_x \cap M_z \neq \emptyset$, dann durch (ii) dass $x \in \underbrace{M_z}_{\in \mathcal{M}} \overset{\text{def. von } M_x}{\longrightarrow} M_x \subset M_z$ und $z \in \underbrace{M_x}_{\in \mathcal{M}} \overset{\text{def. von } M_z}{\longrightarrow} M_z \subset M_x$ ist. Also $M_x = M_z$.

Führen auf M die Äquivalenzrelation $\sim$ ein:

$$x \sim z \ :\Leftrightarrow\ M_x \cap M_z \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ M_x = M_z$$

Wählen aus jeder Äquivalenzklasse $[x]$ in M einen Repräsentanten x aus (Auswahlaxiom) und fassen diese zur Menge R zusammen. Dann gilt:

(a) Für $x, z \in R,\ x \neq z$ ist $M_x \cap M_z = \emptyset$ also insbesondere $M_x \neq M_y$.
Beweis: Aus $x \neq z$ folgt per Konstruktion von R dass $[x] \neq [z] \ \leftrightarrow\ x \not\sim y$ ist, das heißt $M_x \cap M_z = \emptyset$.

(b) Es ist $|R| \leq |\mathbb{N}|$.
Beweis: Klar, denn $|R| \overset{(a)}{=} |\underbrace{\{M_x : x \in R\}}_{\subset M}| \leq |M| = |\mathbb{N}|$

(c) Es ist

$$M = \biguplus_{x \in R} M_x$$

Beweis: Es ist

$$M = \bigcup_{x \in M} M_x \overset{\substack{\text{Konstruktion}\\ \text{von } R}}{=} \biguplus_{x \in R} M_x$$

(d) Für beliebige messbare Menge $A \in \mathcal{M}$ ist

$$A := \bigcup_{\substack{x \in R\\ x \in A}} M_x$$

Beweis: Zum einen ist

$$\bigcup_{\substack{x \in R\\ x \in A}} M_x \subset \bigcup_{x \in A} M_x = \bigcup_{x \in A} \underbrace{\bigcap_{x \in B \in \mathcal{M}} B}_{\substack{\subset A\\ \text{da } x \in A \in \mathcal{M}}} \subset A$$

und zum anderen existiert wegen (c) für $y \in A$ ein $x_0 \in R$ mit $y \in M_{x_0} \xrightarrow{\text{(iv)}} M_{x_0} = M_y \xrightarrow{\text{(iii)}} x_0 \in M_y \subset A$ das heißt

$$y \in M_y = M_{x_0} \overset{\substack{x_0 \in R\\ x_0 \in A}}{\subset} \bigcup_{\substack{x \in R\\ x \in A}} M_x$$

(e) Wegen (d) kann insbesondere jede messbare Menge A durch *Kombinationen* aus R dargestellt werden. Somit muss R unendlich sein, denn sonst wären nur endlich viele messbare Mengen *erzeugbar*, das heißt $|\mathcal{M}| < |\mathbb{N}|$ was ein Widerspruch zur Annahme wäre.

(f) Für beliebige Teilmenge $T \subset R$ ist

$$U_T := \bigcup_{x \in T} M_x \in \mathcal{M}$$

da nach (b) T höchstens abzählbar viele Elemente enthält.

(g) Für unterschiedliche $T_1, T_2 \subset R$ ist auch $\underbrace{U_{T_1}}_{\in \mathcal{M}} \neq \underbrace{U_{T_2}}_{\in \mathcal{M}}$.

Beweis: Es sei o.B.d.A $x \in T_1,\ x \notin T_2$. Dann ist $M_x \subset T_1$. Jedoch ist nach (a) für alle $y \in T_2 : M_y \cap M_x = \emptyset$, das heißt $M_x \not\subset U_{T_2}$. Somit ist $U_{T_1} \neq U_{T_2}$.

Wegen (f) und (g) existieren mindestens $2^{|R|}$ unterschiedliche messbare Mengen, das heißt $|\mathcal{M}| \geq 2^{|R|} \overset{(e)}{\geq} 2^{|\mathbb{N}|} \geq |\mathbb{R}|$, was ein Widerspruch zur Annahme war.

□