

# Übungen zur Magnetohydrodynamik

Sommersemester 2011

**Thema: Dynamoeffekt (2)**

**Termin: Dienstag, 21. 6. 2011**

## Aufgabe 10

Das Ergebnis von Aufgabe 9 lautete

$$\gamma b_\varrho = -i(m\Omega - ku)b_\varrho + \frac{1}{\mu\sigma} \left( \frac{d^2 b_\varrho}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{db_\varrho}{d\varrho} - \frac{m^2 + k^2\varrho^2 + 1}{\varrho^2} b_\varrho - \frac{2im b_\varphi}{\varrho^2} \right),$$

$$\gamma b_\varphi = \varrho \frac{d\Omega}{d\varrho} b_\varrho - i(m\Omega - ku)b_\varphi + \frac{1}{\mu\sigma} \left( \frac{d^2 b_\varphi}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{db_\varphi}{d\varrho} - \frac{m^2 + k^2\varrho^2 + 1}{\varrho^2} b_\varphi + \frac{2im b_\varrho}{\varrho^2} \right).$$

Jetzt spezialisieren wir die Funktionen  $\Omega(\varrho)$  und  $u(\varrho)$  wie folgt:

$$\Omega = \begin{cases} \Omega_0 & \text{für } \varrho \leq R \\ 0 & \text{für } \varrho > R \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} u_0 & \text{für } \varrho \leq R \\ 0 & \text{für } \varrho > R \end{cases}$$

Dabei sind  $\Omega_0$  und  $u_0$  positive Konstanten.

(a) Formulieren Sie die Differentialgleichungen für die gemäß

$$b_\pm = b_\varrho \pm i b_\varphi, \quad w = \varrho/R$$

definierten Größen  $b_\pm(w)$  für  $w \leq 1$  und  $w > 1$  unter Verwendung der Abkürzungen

$$q^2 = k^2 R^2 + \gamma \tau_0 + i(m\Omega_0 - ku_0)\tau_0, \quad s^2 = k^2 R^2 + \gamma \tau_0, \quad \tau_0 = \mu\sigma R^2!$$

(b) Bestimmen Sie Lösungen dieser Differentialgleichungen, die sich für  $w \rightarrow 0$  bzw.  $w \rightarrow \infty$  vernünftig verhalten.

*Hinweis:* Es handelt sich um modifizierte Besselsche Differentialgleichungen, siehe M. Abramowitz und I.A. Stegun, Handbook of mathematical functions, Seite 374; online verfügbar zum Beispiel über: <http://people.math.sfu.ca/cbm/aands/intro.htm>

(c) Leiten Sie unter Verwendung der ursprünglichen Differentialgleichungen (Ergebnis von Aufgabe 9) die Übergangsbedingungen bei  $w = 1$  her, und bestimmen Sie damit die "Dispersionsrelation" zur Berechnung von  $\gamma$  in Abhängigkeit von  $k$  und  $m$ !