# Magnetohydrodynamik
# FSU Jena - SS 2011
# Serie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

June 17, 2011

---

## Aufgabe 09

- Wir betrachten die (gegebenfalls komplexwertige) Induktionsgleichung

$$\partial_t \mathbf{B} = \mathrm{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu\sigma} \,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} \tag{0.1}$$

  für $\mu$ und $\sigma$ konstant und ein Geschwindigkeitsfeld der Form

$$\mathbf{v} = \Omega(r) r \cdot \mathbf{e}_\varphi + u(r) \cdot \mathbf{e}_z, \tag{0.2}$$

  unter der Nebenbedingung $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$. Wir erinnern an die Identität

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}, \tag{0.3}$$

  für jedes 2-mal differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{A}$, wobei $\Delta\mathbf{A}$ der Vektorwertige Laplace-Operator angewandt auf $\mathbf{A}$ sei. In zylindrischen Koordinaten nimmt er die Form

$$\Delta\mathbf{A} = \left[\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\partial_\varphi A_\varphi\right] \cdot \mathbf{e}_r + \left[\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\partial_\varphi A_r\right] \cdot \mathbf{e}_\varphi + (\Delta A_z) \cdot \mathbf{e}_z \tag{0.4}$$

  an. Wir kürzen ab $\alpha := \frac{1}{\mu\sigma}$. Wegen $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$ nimmt (0.1) die Form

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{B} &\overset{(0.3)}{=} \mathrm{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \alpha\Delta\mathbf{B} \overset{(0.2)}{=} \mathrm{rot}\left[(\Omega r B_z - u B_\varphi) \cdot \mathbf{e}_r + u B_r \cdot \mathbf{e}_\varphi - \Omega r B_r \cdot \mathbf{e}_z\right] + \alpha\Delta\mathbf{B} \\
&\overset{(0.4)}{=} \left[-\Omega\partial_\varphi B_r - u\partial_z B_r + \alpha\left(\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r B_r) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 B_r + \partial_z^2 B_r - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\partial_\varphi B_\varphi\right)\right] \cdot \mathbf{e}_r \\
&\quad + \left[\Omega r \partial_z B_z - u\partial_z B_\varphi + \partial_r(\Omega r B_r) + \alpha\left(\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r B_\varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 B_\varphi + \partial_z^2 B_\varphi - \frac{B_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\partial_\varphi B_r\right)\right] \cdot \mathbf{e}_\varphi \\
&\quad + \left[\frac{1}{r}\partial_r(r u B_r) - \Omega\partial_\varphi B_z + \frac{u}{r}\partial_\varphi B_\varphi + \alpha\left(\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r B_z) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 B_z + \partial_z^2 B_z\right)\right] \cdot \mathbf{e}_z
\end{aligned} \tag{0.5}$$

  an.

- Wir machen den Ansatz $\mathbf{B} = \Re(\widetilde{\mathbf{B}})$ mit

$$\widetilde{\mathbf{B}}(r,\varphi,z,t) = \mathbf{b}(r) \underbrace{e^{i(m\varphi - kz) + \gamma t}}_{=:\varepsilon(\varphi,z,t)}, \tag{0.6}$$

  als komplexwertiges Feld, wobei $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\gamma \in \mathbb{C}$. Dann erfüllt $\mathbf{B}$ die Induktionsgleichung (0.1) und die Bedingung $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$ insofern $\widetilde{\mathbf{B}}$ diese erfüllt. Zu lösen sei also die Differentialgleichung (0.1) bzw. äquivalent dazu (0.5) für das komplexe Feld $\widetilde{\mathbf{B}}$ unter der Bedingung $\mathrm{div}\,\widetilde{\mathbf{B}} = 0$. Hinsichtlich des Ansatzes (0.6) suchen wir eine Differentialgleichung für das komplexe, radialsymmetrische Feld $\mathbf{b}$.

- Anwendung von $\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{B}} = 0$ auf (0.6) ist äquivalent zur Bedingung

$$0 = \operatorname{div}\widetilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{r}\partial_r(r\widetilde{B}_r) + \frac{1}{r}\partial_\varphi(\widetilde{B}_\varphi) + \partial_z\widetilde{B}_z = \left[\frac{1}{r}\partial_r(rb_r) + \frac{im}{r}b_\varphi - ikb_z\right]\cdot\varepsilon(\varphi,z,t), \tag{0.7}$$

bzw.

$$\boxed{ikrb_z = \partial_r(rb_r) + imb_\varphi} \tag{0.8}$$

Einsetzen von (0.2) und (0.6) in die Induktionsgleichung (0.5) führt auf die äquivalente Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\gamma\varepsilon\cdot\mathbf{b} = &\left[-im\Omega\varepsilon b_r + iku\varepsilon b_r + \alpha\left(\frac{\varepsilon}{r}\partial_r\left(r\partial_r b_r\right) - (m^2+1)\frac{\varepsilon b_r}{r^2} - k^2\varepsilon b_r - \frac{2im}{r^2}\varepsilon b_\varphi\right)\right]\cdot\mathbf{e}_r\\
&+\left[-ik\Omega r\varepsilon b_z + iku\varepsilon b_\varphi + \varepsilon\partial_r(\Omega r b_r) + \alpha\left(\frac{\varepsilon}{r}\partial_r\left(r\partial_r b_\varphi\right) - k^2\varepsilon b_\varphi - (m^2+1)\frac{\varepsilon b_\varphi}{r^2} + \frac{2im}{r^2}\varepsilon b_r\right)\right]\cdot\mathbf{e}_\varphi\\
&+\left[\frac{\varepsilon}{r}\partial_r(rub_r) - im\Omega\varepsilon b_z + im\frac{u}{r}\varepsilon b_\varphi + \alpha\left(\frac{\varepsilon}{r}\partial_r b_z + \varepsilon\partial_r^2 b_z - \frac{m^2}{r^2}\varepsilon b_z - k^2\varepsilon b_z\right)\right]\cdot\mathbf{e}_z\\
\overset{(0.8)}{=} &\left[-im\Omega\varepsilon b_r + iku\varepsilon b_r + \alpha\varepsilon\left(\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r b_r\right) - (m^2+1)\frac{b_r}{r^2} - k^2 b_r - \frac{2im}{r^2}b_\varphi\right)\right]\cdot\mathbf{e}_r\\
&+\left[-\Omega im\varepsilon b_\varphi + iku\varepsilon b_\varphi + \varepsilon r b_r\partial_r\Omega + \alpha\varepsilon\left(\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r b_\varphi\right) - k^2 b_\varphi - (m^2+1)\frac{b_\varphi}{r^2} + \frac{2im}{r^2}b_r\right)\right]\cdot\mathbf{e}_\varphi\\
&+\left[\frac{\varepsilon}{r}\partial_r(rub_r) + im\frac{u}{r}\varepsilon b_\varphi + \frac{\alpha\varepsilon}{ik}\left[-\frac{im}{\alpha}\Omega + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_r^2 - \frac{m^2}{r^2} - k^2\right]\left[\frac{1}{r}\left(\partial_r(rb_r) + imb_\varphi\right)\right]\right]\cdot\mathbf{e}_z.
\end{aligned} \tag{0.9}$$

Diese entspricht (komponentenweise) den Differentialgleichungen

$$\boxed{\gamma b_r = -im\Omega b_r + ikub_r + \frac{1}{\mu\sigma}\left(\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r b_r\right) - k^2 b_r - (m^2+1)\frac{b_r}{r^2} - \frac{2im}{r^2}b_\varphi\right)} \tag{0.10}$$

und

$$\boxed{\gamma b_\varphi = -\Omega imb_\varphi + ikub_\varphi + rb_r\partial_r\Omega + \frac{1}{\mu\sigma}\left(\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r b_\varphi\right) - k^2 b_\varphi - (m^2+1)\frac{b_\varphi}{r^2} + \frac{2im}{r^2}b_r\right)} \tag{0.11}$$

und

$$\gamma b_z = \frac{1}{r}\partial_r(rub_r) + im\frac{u}{r}b_\varphi + \frac{1}{ik\mu\sigma}\left[-im\mu\sigma\Omega + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_r^2 - \frac{m^2}{r^2} - k^2\right]\left[\frac{1}{r}\left(\partial_r(rb_r) + imb_\varphi\right)\right], \tag{0.12}$$

Nach (0.8) ist letztere äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{ikr}\left[\partial_r(rb_r) + imb_\varphi\right] = &\frac{1}{r}\partial_r(rub_r) + im\frac{u}{r}b_\varphi\\
&+\frac{1}{ik\mu\sigma}\left[-im\mu\sigma\Omega + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_r^2 - \frac{m^2}{r^2} - k^2\right]\left[\frac{1}{r}\left(\partial_r(rb_r) + imb_\varphi\right)\right].
\end{aligned} \tag{0.13}$$

Sie ist durch die Erfüllung der ersten beiden Differentialgleichungen (0.10) & (0.11) automatisch auch erfüllt, was durch den Vergleich

$$(0.13) \cong \frac{1}{ikr}\partial_r\left[r\cdot(0.10)\right] + \frac{m}{kr}\cdot(0.11) \tag{0.14}$$

ersichtlich wird.