Magnetohydrodynamik
FSU Jena - SS 2011
Serie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

May 8, 2011

Aufgabe 04

Gegeben sei ein axialsymmetrisches, divergenzfreies Vektorfeld $\mathbf{B}$. Gesucht seien zwei skalare Felder F, G so dass

$$\mathbf{B} = \overbrace{-\frac{1}{r}\partial_z F}^{B_r} \cdot \mathbf{e}_r + \overbrace{rG}^{B_\varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi + \overbrace{\frac{1}{r}\partial_r F}^{B_z} \cdot \mathbf{e}_z. \tag{0.1}$$

Divergenzfreiheit bedeutet

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{1}{r}\partial_r(rB_r) + \frac{1}{r}\partial_\varphi B_\varphi + \partial_z B_z \tag{0.2}$$

was zusammen mit Axialsymmetrie ($\partial_\varphi B_r = \partial_\varphi B_\varphi = \partial_\varphi B_z = 0$) impliziert

$$B_r + r\partial_r B_r = -r\partial_z B_z. \tag{0.3}$$

Setzen

$$F(r,\varphi,z) := -r \int_{z_0}^{z} B_r(r,\varphi,\widetilde{z})\ d\widetilde{z} + h(r,\varphi) \tag{0.4}$$

mit $z_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und h zunächst als beliebiges, von z unabhängiges, skalares Feld. Dann erfüllt F auf jeden Fall $B_r = -\frac{1}{r}\partial_z F$. Die Forderung $B_z \overset{!}{=} \frac{1}{r}\partial_r F$ führt auf die hinreichende Bedingung

$$rB_z(r,\varphi,z) \overset{!}{=} -\int_{z_0}^{z} B_r(r,\varphi,\widetilde{z})\ d\widetilde{z} - r\int_{z_0}^{z} \partial_r B_r(r,\varphi,\widetilde{z})\ d\widetilde{z} + \partial_r h(r,\varphi), \tag{0.5}$$

die durch den Ansatz

$$h(r,\varphi) := \int_{r_0}^{r} \left[\widetilde{r}B_z(\widetilde{r},\varphi,z) + \int_{z_0}^{z} B_r(\widetilde{r},\varphi,\widetilde{z})\ d\widetilde{z} + \widetilde{r}\int_{z_0}^{z} \partial_r B_r(\widetilde{r},\varphi,\widetilde{z})\ d\widetilde{z} \right]\ d\widetilde{r} \tag{0.6}$$

für beliebiges $r_0 > 0$ erfüllt wird. Bemerke dass

$$\partial_z h(r,\varphi) = \int_{r_0}^{r} \left[\widetilde{r}\partial_z B_z(\widetilde{r},\varphi,z) + B_r(\widetilde{r},\varphi,z) + \widetilde{r}\partial_r B_r(\widetilde{r},\varphi,z)\right]\ d\widetilde{r} \overset{(0.3)}{=} 0, \tag{0.7}$$

sprich h hängt tatsächlich nur von r und φ ab. Somit erfüllen die Felder

$$\boxed{\begin{aligned} F(r,\varphi,z) &:= -r\int_{z_0}^{z} B_r(r,\varphi,\widetilde{z})\ d\widetilde{z} + \int_{r_0}^{r} \left[\widetilde{r}B_z(\widetilde{r},\varphi,z) + \int_{z_0}^{z} \left[B_r(\widetilde{r},\varphi,\widetilde{z}) + \widetilde{r}\partial_r B_r(\widetilde{r},\varphi,\widetilde{z})\right]\ d\widetilde{z} \right]\ d\widetilde{r} \\ G(r,\varphi,z) &:= \frac{1}{r}B_\varphi(r,\varphi,z) \end{aligned}} \tag{0.8}$$

für beliebige $r_0 > 0, z_0 \in \mathbb{R}$ die gewünschte Eigenschaft (0.1).

Bemerkungen:

(i) Man kann die Forderung der Axialsymmetrie auch durch die schwächere Bedingung $\partial_\varphi B_\varphi = 0$ ersetzen. Die Felder (0.8) erfüllen auch dann noch die gewünschte Eigenschaft (0.1), sind jedoch allgemein nur im Falle der vollen Axialsymmetrie φ-unabhängig.

(ii) Sind umgekehrt F, G skalare, von φ-unabhängige Felder, so ist $-\frac{1}{r}\partial_z F \mathbf{e}_r + rG\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\partial_r F\mathbf{e}_z$ ein axialsymmetrisches, divergenzfreies Vektorfeld.

Aufgabe 05

Beginnen mit zwei divergenzfreien, axialsymmetrischen Feldern $\mathbf{B}, \mathbf{v}$ die miteinander durch

$$\partial_t \mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu\sigma} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B} \tag{0.9}$$

verknüpft sind, wobei $\mu, \sigma \neq 0$ konstanten seien. Nach Aufgabe (04) lassen sich $\mathbf{B}$ und $\mathbf{v}$ gemäß

$$\mathbf{B} = (B_r, B_\varphi, z) = \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial z}, rG, \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right) \quad , \quad \mathbf{v} = (\mathrm{v}_r, \mathrm{v}_\varphi, \mathrm{v}_z) = \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial z}, rQ, \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}\right) \tag{0.10}$$

darstellen, wobei F, G, P, Q geeignete, von φ-unabhängige skalare Felder sind. Durch direktes Ausrechnen erhält man

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \partial_z(\mathrm{v}_z B_r - \mathrm{v}_r B_z) \\ \partial_z(\mathrm{v}_\varphi B_z - \mathrm{v}_z B_\varphi) - \partial_r(\mathrm{v}_r B_\varphi - \mathrm{v}_\varphi B_r) \\ \frac{1}{r}\partial_r\left[r\mathrm{v}_z B_r - r\mathrm{v}_r B_z\right] \end{bmatrix}$$

$$\overset{(0.10)}{=} \begin{bmatrix} \partial_z\left[\frac{1}{r^2}(\partial_r P)(\partial_z F) - \frac{1}{r^2}(\partial_z P)(\partial_r F)\right] \\ \\ {\scriptstyle (\partial_z Q)(\partial_r F) + Q(\partial_z\partial_r F) - (\partial_z\partial_r P)G - (\partial_r P)(\partial_z G)} \\ {\scriptstyle +(\partial_r\partial_z P)G + (\partial_z P)(\partial_r G) - (\partial_r Q)(\partial_z F) - Q(\partial_r\partial_z F)} \\ \\ \frac{1}{r}\partial_r\left[-\frac{1}{r}(\partial_r P)(\partial_z F) + \frac{1}{r}(\partial_z P)(\partial_r F)\right] \end{bmatrix} \tag{0.11}$$

und

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\partial_z^2 B_r + \partial_z\partial_r B_z \\ -\partial_z^2 B_\varphi + \frac{1}{r^2}\partial_r(rB_\varphi) - \frac{1}{r}\partial_r^2(rB_\varphi) \\ \frac{1}{r}(\partial_z B_r - \partial_r B_z) + (\partial_r\partial_z B_r - \partial_r^2 B_z) \end{bmatrix}$$

$$\overset{(0.10)}{=} \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\partial_z^3 F + \partial_z\left(-\frac{1}{r^2}\partial_r F + \frac{1}{r}\partial_r^2 F\right) \\ -r\partial_z^2 G + \frac{1}{r^2}(2rG + r^2\partial_r G) - \frac{1}{r}\partial_r(2rG + r^2\partial_r G) \\ -\frac{1}{r^2}\partial_z^2 F - \frac{1}{r^2}\partial_r^2 F + \partial_z\left(\frac{1}{r^2}\partial_z F - \frac{1}{r}\partial_r\partial_z F\right) - \partial_r\left(-\frac{1}{r^2}\partial_r F + \frac{1}{r}\partial_r^2 F\right) \end{bmatrix} \tag{0.12}$$

$$= \begin{bmatrix} \partial_z\left[\frac{1}{r}\partial_z^2 F - \frac{1}{r^2}\partial_r F + \frac{1}{r}\partial_r^2 F\right] \\ -r\partial_z^2 G - 3\partial_r G - r\partial_r^2 G \\ \frac{1}{r}\partial_r\left[-\partial_z^2 F + \frac{1}{r}\partial_r F - \partial_r^2 F\right] \end{bmatrix}.$$

Dabei stehen die Einträge in den Vektoren jeweils für die r, φ und z-Komponenten der Vektorfelder. Einsetzen von (0.11) und (0.12) in die Induktionsgleichung (0.9) führt auf

$$\begin{bmatrix} \partial_z\left(-\frac{1}{r}\partial_t F\right) \\ \\ r\partial_t G \\ \\ \frac{1}{r}\partial_r(\partial_t F) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_t B_r \\ \\ \partial_t B_\varphi \\ \\ \partial_t B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_z\Big[\frac{1}{r^2}(\partial_r P)(\partial_z F) - \frac{1}{r^2}(\partial_z P)(\partial_r F) - \alpha\cdot\left(\frac{1}{r}\partial_z^2 F - \frac{1}{r^2}\partial_r F + \frac{1}{r}\partial_r^2 F\right)\Big] \\ \\ {\scriptstyle (\partial_z Q)(\partial_r F) + Q(\partial_z\partial_r F) - (\partial_z\partial_r P)G - (\partial_r P)(\partial_z G)} \\ {\scriptstyle +(\partial_r\partial_z P)G + (\partial_z P)(\partial_r G) - (\partial_r Q)(\partial_z F) - Q(\partial_r\partial_z F)} \\ {\scriptstyle -\alpha\left(-r\partial_z^2 G - 3\partial_r G - r\partial_r^2 G\right)} \\ \\ \frac{1}{r}\partial_r\Big[-\frac{1}{r}(\partial_r P)(\partial_z F) + \frac{1}{r}(\partial_z P)(\partial_r F) - \alpha\left(-\partial_z^2 F + \frac{1}{r}\partial_r F - \partial_r^2 F\right)\Big] \end{bmatrix}, \tag{0.13}$$

mit $\alpha := \frac{1}{\mu\sigma}$. Bemerke dass die $r-$ und $z-$Komponenten von (0.13) ein geschlossenes, partielles Differentialgleichungssystem für B_r, B_z bzw. F in den Variablen t, r, z bilden. Wie zu erkennen ist, lässt sich dies einmal integrieren und führt auf

$$-\frac{1}{r}\partial_t F = \frac{1}{r^2}(\partial_r P)(\partial_z F) - \frac{1}{r^2}(\partial_z P)(\partial_r F) - \alpha \cdot \left(\frac{1}{r}\partial_z^2 F - \frac{1}{r^2}\partial_r F + \frac{1}{r}\partial_r^2 F\right) + h(r) \tag{0.14}$$

bzw.

$$\partial_t F = -\frac{1}{r}(\partial_r P)(\partial_z F) + \frac{1}{r}(\partial_z P)(\partial_r F) - \alpha\left(-\partial_z^2 F + \frac{1}{r}\partial_r F - \partial_r^2 F\right) + g(z), \tag{0.15}$$

mit h und g jeweils als r- und z-abhängige Felder. Vergleich von (0.14) und (0.16) liefert $h = g = 0$ und somit

$$\boxed{\partial_t F = -\frac{1}{r}(\partial_r P)(\partial_z F) + \frac{1}{r}(\partial_z P)(\partial_r F) + \frac{1}{\mu\sigma}\left(\partial_z^2 F - \frac{1}{r}\partial_r F + \partial_r^2 F\right).} \tag{0.16}$$

Einsetzen der Lösung $F(r, z)$ von (0.16) in die $\varphi-$Komponente von (0.13) liefert eine partielle Differentialgleichung für G in t, r, z:

$$\boxed{\begin{aligned} r\partial_t G = &+ (\partial_z Q)(\partial_r F) + Q(\partial_z\partial_r F) - (\partial_z\partial_r P)G - (\partial_r P)(\partial_z G) \\ &+ (\partial_r\partial_z P)G + (\partial_z P)(\partial_r G) - (\partial_r Q)(\partial_z F) - Q(\partial_r\partial_z F) \\ &- \frac{1}{\mu\sigma}\left(-r\partial_z^2 G - 3\partial_r G - r\partial_r^2 G\right). \end{aligned}} \tag{0.17}$$