Übungen zur Magnetohydrodynamik

Sommersemester 2011

Thema: Das Cowlingsche Theorem

Termin: Dienstag, 10. 5. 2011

Aufgabe 4

Zeigen Sie, daß man ein axialsymmetrisches und quellenfreies Vektorfeld $\vec{B}$ mittels zweier skalarer Funktionen F und G in der Form

$$\vec{B} \equiv (B_\varrho, B_\varphi, B_z) = \left(-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial z},\, \varrho G,\, \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial \varrho}\right)$$

darstellen kann!

Aufgabe 5

Formulieren Sie die Induktionsgleichung

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu\sigma}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}$$

($\mu = \mathrm{const.}$, $\sigma = \mathrm{const.}$) für axialsymmetrische Felder $\vec{B}$ (und $\vec{v}$) unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ als ein Differentialgleichungssystem für die in Aufgabe 4 eingeführten Funktionen F und G! Drücken Sie dazu $\vec{v}$ in analoger Weise durch zwei skalare Funktionen P und Q aus:

$$\vec{v} = \left(-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial z},\, \varrho Q,\, \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial \varrho}\right)$$

Hinweis: Es empfielt sich, die Induktionsgleichung in einen toroidalen und einen poloidalen Anteil zu zerlegen. Der poloidale Anteil läßt sich “einmal integrieren”.