Magnetohydrodynamik
FSU Jena - SS 2011
Serie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

May 7, 2011

Aufgabe 02

Wir zeigen dass die Grundgleichungen der Magnetohydrodynamik[1]

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} \quad , \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{0.1}$$

unter einer Galilei-Transformation der Geschwindigkeit $\mathbf{V}$ invariant bleiben, wobei wir annehmen dass komponentenweise $\rho_{\text{el}}\mathbf{V} \ll \mathbf{j}$. Unter solch einer Transformation $\widetilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} - t\mathbf{V}$ transformieren sich die Felder gemäß

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad , \quad \widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \\ \\ \widetilde{\mathbf{j}} = \mathbf{j} \quad , \quad \widetilde{\rho}_{\text{el}} = \rho_{\text{el}} \quad , \quad \widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{V} \\ \\ \widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad , \quad \widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\end{gathered} \tag{0.2}$$

(vgl. Lorentz-Boost für $\|\mathbf{V}\|/c \to 0$). Bemerke dass wir $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{j}, \rho_{\text{el}}, \mathbf{D}$ und $\mathbf{H}$ in den Koordinaten $\mathbf{x}$ betrachten, $\widetilde{\mathbf{E}}, \widetilde{\mathbf{B}}, \widetilde{\mathbf{j}}, \widetilde{\rho}_{\text{el}}, \widetilde{\mathbf{D}}$ und $\widetilde{\mathbf{H}}$ hingegen in den transformierten Koordinaten $\widetilde{\mathbf{x}}$, so dass z.B. $\widetilde{\mathbf{D}}(t, \widetilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{D}(t, \widetilde{\mathbf{x}} + t\mathbf{V})$. Zu überprüfen wäre nun dass (0.1) auch für die transformierten Felder in den neuen Koordinaten genauso gelten. Tatsächlich folgt aus (0.1) und (0.2):

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_{\widetilde{\mathbf{x}}} \widetilde{\mathbf{B}} &= \operatorname{div}_{\widetilde{\mathbf{x}}} \mathbf{B} = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{B} = 0 \\
\operatorname{rot}_{\widetilde{\mathbf{x}}} \widetilde{\mathbf{H}} &= \operatorname{rot}_{\widetilde{\mathbf{x}}} \mathbf{H} = \underbrace{\operatorname{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{H}}_{\mathbf{j}} = \widetilde{\mathbf{j}} \\
\operatorname{rot}_{\widetilde{\mathbf{x}}} \widetilde{\mathbf{E}} &= \operatorname{rot}_{\mathbf{x}} \widetilde{\mathbf{E}} = \operatorname{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{E} + \operatorname{rot}_{\mathbf{x}}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = -\partial_t \mathbf{B} + \mathbf{V} \underbrace{\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{B}}_{0} - (\mathbf{V} \operatorname{grad}_{\mathbf{x}}) \underbrace{\mathbf{B}}_{\widetilde{\mathbf{B}}} \\
&= -\partial_t \underbrace{\left((t, \widetilde{\mathbf{x}}) \mapsto \mathbf{B}(t, \widetilde{\mathbf{x}} + t\mathbf{V})\right)}_{\widetilde{\mathbf{B}}} = -\partial_t \widetilde{\mathbf{B}} \\
\widetilde{\mathbf{j}} = \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \sigma(\widetilde{\mathbf{E}} - \cancel{\mathbf{V} \times \mathbf{B}} + (\widetilde{\mathbf{v}} + \cancel{\mathbf{V}}) \times \mathbf{B}) = \sigma(\widetilde{\mathbf{E}} + \widetilde{\mathbf{v}} \times \widetilde{\mathbf{B}}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 03

Die Gleichung

$$\partial_t \mathbf{B} = \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathbf{B} \tag{0.3}$$

entspricht einer Diffusionsgleichung für jede der Komponenten $B_1, .., B_n$ von $\mathbf{B}$, jede entkoppelt von den anderen. Sie besitzt bekanntlich die Fundamentallösung

$$K(t, \mathbf{x}) = \left[\frac{\mu\sigma}{4\pi t}\right]^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{\mu\sigma}{4t}\mathbf{x}^2\right] = \mathcal{N}^n_{0,s(t)}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{N}^1_{0,s(t)}(x_i), \tag{0.4}$$

[1] Annahmen: Komponentenweise $|\dot{\mathbf{D}}| \ll |\mathbf{j}|$ und $|\rho_{\text{el}}\mathbf{v}| \ll |\mathbf{j}|$.

wobei $s(t) := \frac{2t}{\mu\sigma}$ und $\mathcal{N}^n_{\mu,s}$ die Verteilungsdichte einer n-dimensionalen Gauss-verteilung mit Zentrum μ und Kovarianzmatrix $\mathrm{diag}(s,..,s)$ ist. Für jedes Anfangswertproblem $\mathbf{B}(0,\mathbf{x}) \overset{!}{=} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ergibt sich die Lösung durch

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = (K(t,\cdot) * \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{y})\ d\mathbf{y}. \tag{0.5}$$

Für den Spezialfall $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_n)$ nimmt (0.5) die Form

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{N}^1_{0,s(t)}(y_i)\ dy_i}_{1} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{N}^1_{0,s(t)}(y_n) \cdot \mathbf{f}(x_n - y_n)\ dy_n = (\mathcal{N}^1_{0,s(t)} * \mathbf{f})(x_n) \tag{0.6}$$

an.

(a) Für den Spezialfall $n = 3$ und

$$f_2(\mathbf{x}) = f_3(\mathbf{x}) = 0\ ,\ f_1(\mathbf{x}) = f_1(x_3) = B_0 e^{-x_3^2/L^2} = B_0\sqrt{\pi L^2} \cdot \mathcal{N}^1_{0,L^2/2}(x_3) \tag{0.7}$$

mit B_0, L : const, nimmt (0.6) die Form

$$B_1(t,\mathbf{x}) = B_0\sqrt{\pi L^2} \cdot \Big((\mathcal{N}^1_{0,s(t)} * \mathcal{N}^1_{0,L^2/2})(x_3), 0, 0\Big) = B_0\sqrt{\pi L^2} \cdot \Big(\mathcal{N}^1_{0,s(t)+L^2/2}(x_3), 0, 0\Big)$$

$$= \frac{B_0}{\sqrt{1 + \frac{4\pi t}{\mu\sigma L^2}}} \left(\exp\left[-\frac{x_3^2}{L^2 + \frac{4t}{\mu\sigma}}\right], 0, 0\right) \tag{0.8}$$

an.

(b) Für den Fall $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_3), 0, 0)$ ergibt sich aus (0.6) direkt

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = \Big((\mathcal{N}^1_{0,s(t)} * f_1)(x_3), 0, 0\Big)\ . \tag{0.9}$$

(c) Der 3-dimensionale Fall ist bereits in (0.5) angegeben.