# Magnetohydrodynamik
# FSU Jena - SS 2011
# Serie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

April 12, 2011

---

### Aufgabe 01

Beginnend mit dem Feldstärketensor

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1/c & -E^2/c & -E^3/c \\ E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

und dem Transformationsgesetz

$$\widetilde{F}^{ij} = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu} \tag{0.2}$$

unter Koordinatentransformationen $\widetilde{x} = \widetilde{x}(x)$, betrachten wir die Auswirkung von (0.2) auf die Komponenten von $F$ für den Spezialfall eines boost mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}^0 \\ \widetilde{x}^1 \\ \widetilde{x}^2 \\ \widetilde{x}^3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta_1\gamma & -\beta_2\gamma & -\beta_3\gamma \\ -\beta_1\gamma & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_1}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\beta_2\gamma & (\gamma-1)\frac{\beta_2\beta_1}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_2\beta_2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\beta_3\gamma & (\gamma-1)\frac{\beta_3\beta_1}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_3\beta_2}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_3\beta_3}{\beta^2} \end{pmatrix}}_{(\Lambda^\mu{}_\nu)} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{0.3}$$

wobei $\beta_i := \mathrm{v}_i/c$, $\beta := \|\mathbf{v}\|/c$ und $\gamma := 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Genauer gesagt, wollen wir $(\widetilde{F})$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\beta)$ bestimmen. Da $(\widetilde{F}) = \Lambda(F)\Lambda^T$ mindestens linear von $\Lambda$ abhängt, können wir für diese Betrachtung die Terme höherer Ordnung in $\Lambda$ ignorieren und die Form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ -\beta_1 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\beta^2) \tag{0.4}$$

verwenden[1]. Man erhält

$$(\widetilde{F}) = \Lambda(F)\Lambda^T = \begin{pmatrix} 0 & \substack{(E^1/c)(-1+\beta_1^2)-B^3\beta_2\\(E^2/c)\beta_1\beta_2+B^2\beta_3\\(E^3/c)\beta_1\beta_3} & \substack{B^3\beta_1+(E^1/c)\beta_1\beta_2\\+(E^2/c)(-1+\beta_2^2)-B^1\beta_3\\(E^3/c)\beta_2\beta_3} & \substack{-B^2\beta_1+B^1\beta_2\\(E^1/c)\beta_1\beta_3+(E^2/c)\beta_2\beta_3\\(E^3/c)(-1+\beta_3^2)} \\ * & 0 & \substack{-B^3+(E^2/c)\beta_1\\-(E^1/c)\beta_2} & \substack{B^2+(E^3/c)\beta_1\\-(E^1/c)\beta_3} \\ * & * & 0 & \substack{-B^1+(E^3/c)\beta_2\\-(E^2/c)\beta_3} \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\beta^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \substack{-(E^1/c)\\-(B^3\beta_2-B^2\beta_3)} & \substack{-(E^2/c)\\-(B^1\beta_3-B^3\beta_1)} & \substack{-(E^3/c)\\-(B^2\beta_1-B^1\beta_2)} \\ * & 0 & \substack{-B^3\\-((E^1/c)\beta_2-(E^2/c)\beta_1)} & \substack{B^2\\+((E^3/c)\beta_1-(E^1/c)\beta_3)} \\ * & * & 0 & \substack{-B^1\\-((E^2/c)\beta_3-(E^3/c)\beta_2)} \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\beta^2), \tag{0.5}$$

woraus abzulesen ist:

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B} + \mathcal{O}(\beta^2) \quad , \quad \widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E} + \mathcal{O}(\beta^2).} \tag{0.6}$$

Auf ähnlicher Weise verwendet man auch das Transformationsgesetz $(\widetilde{H}) = \Lambda\cdot(H)\cdot\Lambda^T$ für den Tensor

$$(H^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -cD^1 & -cD^2 & -cD^3 \\ cD^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ cD^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ cD^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.7}$$

um auf

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{H} + \mathcal{O}(\beta^2) \quad , \quad \widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} - \mathbf{v}\times\mathbf{D} + \mathcal{O}(\beta^2)} \tag{0.8}$$

zu gelangen. Schließlich erhält man über das Transformationsgesetz $(\widetilde{j}) = \Lambda\cdot(j)$ für den Viererstrom $(j^\mu) = (c\rho_{\rm el}, \mathbf{j})^T$ im bewegten Bezugssystem

$$(\widetilde{j}) = \begin{pmatrix} c\rho_{\rm el} - j^1\beta_1 - j^2\beta_2 - j^3\beta_3 \\ j^1 - c\rho_{\rm el}\beta_1 \\ j^2 - c\rho_{\rm el}\beta_2 \\ j^3 - c\rho_{\rm el}\beta_3 \end{pmatrix}, \tag{0.9}$$

woraus abzulesen ist

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{j}} = \mathbf{j} - \rho_{\rm el}\mathbf{v} + \mathcal{O}(\beta^2) \quad , \quad \widetilde{\rho}_{\rm el} = \rho_{\rm el} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{j} + \mathcal{O}(\beta^2).} \tag{0.10}$$

**Bemerkung:** Die Materialgleichungen lauten in jedem Bezugssystem $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ und $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mathbf{M}$. Sei nun angenommen dass im zur Hintergrundmaterie ruhenden Bezugssystem gilt

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_e\mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{M} = \frac{\zeta_m}{\mu_0}\mathbf{B}, \tag{0.11}$$

[1] Beachte dass $\gamma = 1 + \mathcal{O}(\beta^2)$.

was einem linearen, isotropen, homogenen Medium entspricht. Bekanntlich nehmen dann die Materialgleichungen die Form

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \tag{0.12}$$

an, wobei die Permittivität $\varepsilon := \varepsilon_0(1 + \chi_e)$ und Permeabilität $\mu := \mu_0/(1 - \zeta_m)$ materialabhängige, skalare Konstanten sind. Aus den Transformationsgleichungen (0.6) und (0.8) folgt jedoch für das bewegte Bezugssystem

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \frac{1}{\mu}\mathbf{B} + \mathcal{O}(\beta^2) = \varepsilon \cdot \widetilde{\mathbf{E}} + \left[\frac{1}{\mu c^2} - \varepsilon\right] \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathcal{O}(\beta^2) = \varepsilon \cdot \widetilde{\mathbf{E}} + \varepsilon \left[\frac{c_m^2}{c^2} - 1\right] \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathcal{O}(\beta^2), \tag{0.13}$$

wobei $c_m := 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ die Phasenlichtgeschwindigkeit im ruhenden Medium ist. Zu erkennen ist dass $\widetilde{\mathbf{D}}$ im allgemeinen Fall $c_m \neq c$ nicht mehr parallel zu $\widetilde{\mathbf{E}}$ steht, sondern eine Abweichung senkrecht zur Bewegungsrichtung aufweist. Analoges gilt auch für $\widetilde{\mathbf{H}}$, das nicht mehr parallel zu $\widetilde{\mathbf{B}}$ steht.