Lineare Algebra II

FSU Jena - SS 2008

Serie 11 - Lösungen

Stilianos Louca

12. Juli 2008

Notationen

- Für Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$ bezeichne
$$[a,b] := \{ta + (1-t)b : t \in [0,1]\}$$
- Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ bezeichne $S_{ab}^t := bt + (1-t)a$.

Aufgabe 01

Bemerkung: Für $A, B, E, O \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\overline{OE} = \lambda\overline{OA} + (1-\lambda)\overline{OB}$$

genau dann wenn
$$E = O + \overline{OE} = O + \lambda(A-O) + (1-\lambda)(B-O) = \lambda A + (1-\lambda)B = S_{AB}^\lambda$$

Zeigen: (i)⇒(ii)

Es sei E Extremalpunkt von K, das heißt es existiert keine Strecke in K so dass E in ihrem relativen Inneren liegt. Anders formuliert, es existieren keine $A \neq B \in K,\ t \in (0,1)$ mit $S_{AB}^t = E$. Ist also $E = S_{AB}^t$ für $A, B \in K$ und $t \in (0,1)$ so muss notwendigerweise $A = B$ und somit $E = tA + (1-t)A = A$ sein.

Zeigen: (ii)⇒(iii)

Es gelte (ii). Seien also $A, B \in K \setminus \{E\}$ und $\lambda \in [0,1]$ beliebig. Für $\lambda \in \{0,1\}$ ist natürlich $S_{AB}^\lambda \in \{A, B\} \subset K \setminus \{E\}$. Für $\lambda \in (0,1)$ ist $S_{AB}^\lambda \neq E$, denn sonst wäre $E = A$ was ein Widerspruch zur Wahl von A wäre. Außerdem ist $S_{AB}^\lambda \in K$ für $\lambda \in (0,1)$, da K konvex. Somit ist $S_{AB}^\lambda \in K \setminus \{E\}$, das heißt $K \setminus \{E\}$ ist konvex.

Zeigen: (iii)⇒(i)

Es sei $E \in K$, so dass $K \setminus \{E\}$ konvex ist, das heißt für $A, B \in K \setminus \{E\}$ ist auch $[A,B] \subset K \setminus \{E\}$. Existieren nun $A \neq B \in K$ mit $E = S_{AB}^t$ für ein geeignetes $t \in [0,1]$, so muss gelten $A = E$ oder $B = E$, denn sonst wäre $E \in [A,B] \subset K \setminus \{E\}$ ein Widerspruch. Doch das heißt es muss $t \in \{0,1\}$ sein, also $t \notin (0,1)$. Somit kann E nicht im relativen Inneren von $[A,B]$ sein, und muss demnach ein Extremalpunkt von K sein.
$\square$

Aufgabe 02

Hilfsaussage 01

Für eine beliebige Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ mit $\emptyset \neq C \neq \mathbb{R}^n$ ist $\partial C \neq \emptyset$.
Beweis: Wählen $x_1 \in C,\ x_2 \in C^c$ und nennen

$$T := \left\{ t \in [0,1] : S^t_{x_1 x_2} \in C \right\}$$

Setzen $t_0 := \sup T$.

- Fall: $t_0 \in T$, das heißt $S^{t_0}_{x_1x_2} \in C$ und insbesondere $t_0 \in [0,1)$. Per Konstruktion von t_0 ist für jedes $0 < \varepsilon < 1 - t_0$:

  $$t + \varepsilon \notin T \ \rightarrow \ S^{t_0+\varepsilon}_{x_1x_2} \in C^c$$

  Da $S^{()}_{x_1x_2}$ stetig, das heißt $S^{t_0+\varepsilon}_{x_1x_2} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} S^{t_0}_{x_1x_2}$, ist $S^{t_0}_{x_1x_2}$ Häufungspunkt von C^c, also $S^{t_0}_{x_1x_2} \in \partial C$.

- Fall: $t_0 \notin T$ das heißt $S^{t_0}_{x_1x_2} \in C^c$. Per Konstruktion existiert jedoch eine Folge $(\tau_n) \subset T$ mit $\tau_n \uparrow t_0$ und somit $\underbrace{S^{\tau_n}_{x_1x_2}}_{\in C} \xrightarrow{n\to\infty} S^{t_0}_{x_1x_2}$, das heißt $S^{t_0}_{x_1x_2}$ ist Häufungspunkt von C und somit ebenfalls in ∂C.

Hilfsaussage 02

Für beliebige Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\overline{C} \cap \overline{C^c} = \partial C$$

Beweis:

$$\overline{C} \cap \overline{C^c} = (C \cup \partial C) \cap (C^c \cap \underbrace{\partial C^c}_{\partial C}) = \underbrace{(C \cap C^c)}_{\emptyset} \cup \underbrace{(\partial C \cap \partial C)}_{\partial C} \cup \underbrace{(\partial C \cap C^c)}_{\subset \partial C} \cup \underbrace{(C \cap \partial C)}_{\subset \partial C} = \partial C$$

Bemerkung: Allgemein gilt $\partial\overline{C} = \partial C$ und $\partial\partial C = \partial C$.

Hilfsaussage 03

Für eine konvexe Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist $\overline{K}$ auch konvex.
Beweis: Für Elemente $x, y \in \overline{K}$ existieren per Definition Folgen $(x_n), (y_n) \subset K$ mit $x_n \to x,\ y_n \to y$. Für beliebiges $t \in [0,1]$ ist dann

$$\underbrace{S^t_{x_n y_n}}_{\substack{\in K \subset \overline{K} \\ \text{da } K \text{ konvex}}} = t y_n + (1-t) x_n \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{ty + (1-t)x}_{\substack{\in \overline{K} \\ \text{da } \overline{K} \text{ abgeschlossen}}} = S^t_{xy}$$

Beweis der Aussage

Die Mengen K_1, K_2 sind offensichtlich komplementär, nennen also $K := K_1 \rightarrow\ K^c = K_2$. Dann gilt nach Hilfsaussage 02:

$$\overline{K} \cap \overline{K^c} = \partial K$$

Da $\emptyset \neq K \neq \mathbb{R}^n$ war, ist nach Hilfsaussage 01 $\partial K \neq \emptyset$. Wählen also $x_0 \in \partial K = \partial\overline{K}$. Da $\overline{K}$ abgeschlossen und konvex ist, existiert eine die Menge $\overline{K}$, am Punkt x_0 stützende Hyperebene $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l, x \rangle = c\}$$

mit $\langle l, x \rangle \leq c \ \forall\ x \in \overline{K} \supset K$, $\langle l, x_0 \rangle = c$. Nennen $\langle l, \cdot \rangle =: L$

- **Behauptung:** $\mathcal{H}$ separiert K und K^c (schwach), das heißt $\langle l, y \rangle \geq c \ \forall\ y \in K^c$.
  Beweis durch Widerspruch: Es existiere ein $y_0 \in K^c,\ \delta > 0$ mit $\langle l, y_0 \rangle < c - \delta$. Dann eine Folge $\underbrace{x_n}_{\in K} \to x_0$ und es gilt

für $t > 1$:

$$\left\langle l, S^t_{y_0 x_n}\right\rangle = \langle l, t x_n\rangle + \langle l, (1-t) y\rangle = t \underbrace{\langle l, x_0\rangle}_{c} + t\,\langle l, x_n - x_0\rangle + \underbrace{(1-t)}_{<0}\underbrace{\langle l, y_0\rangle}_{<c-\delta}$$

$$> tc + (1-t)(c-\delta) - tL(x_n - x_0) = c + (t-1)\delta - tL(x_n - x_0) \quad \forall\ n$$

Da L stetig und $L(0) = 0$ mit $x_n \to x_0$ ist, existiert z.B. für $t = 2$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $2L(x_n - x_0) < \delta$ also:

$$\left\langle l, S^2_{y_0 x_n}\right\rangle > c \ \Rightarrow\ y_1 := S^2_{y_0 x_n} \in K^c$$

Da K^c konvex, muss $[y_0, y_1] \subset K^c$ sein. Doch offensichtlich ist $\underbrace{x_n}_{\in K} = S^{1/2}_{y_0 y_1} \in [y_0, y_1]$ ein Widerspruch!

- **Behauptung:** $\partial K = \mathcal{H}$.
  Beweis: Für $x \in \partial K$ $(= \partial K^c)$ existieren Folgen $\underbrace{x_n}_{\in K} \to x,\ \underbrace{y_n}_{\in K^c} \to x$, das heißt

  $$\underbrace{\langle l, x_n\rangle}_{\le c} \to \langle l, x\rangle \ ,\ \underbrace{\langle l, y_n\rangle}_{\ge c} \to \langle l, x\rangle \quad \Rightarrow\ c \le \langle l, x\rangle \le c \ \Rightarrow\ \langle l, x\rangle = c$$

  also $x \in \mathcal{H}$.
  Sei nun $x \in \mathcal{H}$ also $\langle l, x\rangle = c$. Bekanntlich teilt $\mathcal{H}$ den $\mathbb{R}^n$ in zwei Halbräume R_1, R_2 so dass $\mathcal{H} = \partial R_1 = \partial R_2$, und es gibt natürlich Folgen $x_n \to x,\ y_n \to x$ so dass diese jeweils auf den beiden Seiten liegen:

  $$\underbrace{\langle l, x_n\rangle < c}_{\Rightarrow\ x_n \notin K^c}\ ,\ \underbrace{\langle l, y_n\rangle > c}_{\Rightarrow\ y_n \notin K}$$

  Somit sind $x_n \in K,\ y_n \in K^c$, das heißt x ist Häufungspunkt von K und K^c, also $x \in \partial K$.

Somit ist

$$\overline{K_1} \cap \overline{K_2} = \partial K = \mathcal{H}$$

Variante: Alternativ kann man eine die beiden Mengen K_1, K_2 separierende Hyperebene wie folgt konstruieren: Mindestens eine der beiden Mengen hat ein Inneres, denn sonst wäre

$$\mathbb{R}^n = K_1 \cup K_2 = (K_1 \cup \partial K_1) = (\underbrace{\mathrm{int} K_1}_{\emptyset} \cup \partial K_1) \cup (\underbrace{\mathrm{int} K_2}_{\emptyset} \cup \partial K_2) = \partial K_1 \cup \partial K_2$$

und somit

$$\mathrm{int}\mathbb{R}^n = \mathrm{int}(\partial K_1 \cup \partial K_2) = \underbrace{\mathrm{int}\partial K_1}_{\emptyset} \cup \underbrace{\mathrm{int}\partial K_2}_{\emptyset} = \emptyset$$

was natürlich nicht stimmt! Sei also o.B.d.A $\mathrm{int} K_1 \neq \emptyset$. Dann ist $\underbrace{\mathrm{int} K_1}_{\neq\emptyset} \cap K_2 = \emptyset$. Da die beiden Mengen außerdem konvex sind, existiert nach Satz 28 eine Hyperebene $\mathcal{H}$ die K_1 und K_2 (schwach) separiert. $\square$

Aufgabe 04

Bezeichnung: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei $a_x := a(x)$ und $\overline{xy} := \overrightarrow{xy}$.

Voraussetzungen

Der Fall $n = 1$ ist ausgeschlossen, denn: Die Bijektion $a(x) = x^3$ erhält die Geraden, da $a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Da für x, y, z, w mit $\overline{xy} \neq 0 \neq \overline{wz}$ stets

$$\cos\widehat{\overline{xy}, \overline{zw}} = \frac{(y-x)\cdot(w-z)}{\|y-x\|\cdot\|w-z\|} = \mathrm{sgn}(w-z)\cdot\mathrm{sgn}(y-x)$$

$$= \mathrm{sgn}(w^3 - z^3)\cdot\mathrm{sgn}(y^3 - x^2) = \mathrm{sgn}(a_w - z_z)\cdot\mathrm{sgn}(a_y - a_x) = \cos\widehat{\overline{a_x a_y}, \overline{a_z a_w}}$$

gilt, erhält a auch Winkel. Doch es ist zum Beispiel

$$\|a_2 - a_1\| = \|8 - 1\| = 7 \cdot \|2 - 1\|$$

jedoch

$$\|a_3 - a_1\| = \|27 - 1\| = 13 \cdot \|3 - 1\|$$

was ein Widerspruch zur Aussage ist. Es sei also $n \geq 2$.

Es ist zu zeigen: Es existiert eine Zahl $k > 0$ so dass für Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|\overline{a_x a_y}\| = k \cdot \|\overline{xy}\|$. Dabei genügt es zu zeigen: Ist für zwei Punkte $x \neq y : \|\overline{a_x a_y}\| = k \cdot \|\overline{xy}\|\,,\ k > 0$ so ist auch für $w \neq z : \|\overline{a_w a_z}\| = k \cdot \|\overline{wz}\|$. Denn dann können wir einfach 2 Punkte $x_0 \neq y_0 \in \mathbb{R}^n$ fest wählen.

Fall 1

Betrachten die nicht-kollinearen Punkte $y \neq x \neq z$, o.B.d.A $y \neq z$. Da a injektiv ist, ist $a_y \neq a_x \neq a_z \neq a_y$. Es gilt:

$$\|\overline{xy}\|^2 \|\overline{yz}\|^2 - \langle \overline{xy}, \overline{yz} \rangle^2 = \langle x - y, x - y \rangle \langle y - z, y - z \rangle - \langle x - y, y - z \rangle^2$$

$$= \left[\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x, y \rangle \right] \cdot \left[\|y\|^2 + \|z\|^2 - 2 \langle z, y \rangle \right] - \left[\langle x, y \rangle - \|y\|^2 - \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \right]^2$$

$$= \|x\|^2 \|y\|^2 + \|x\|^2 \|z\|^2 + \|y\|^2 \|z\|^2 - \langle x, y \rangle^2 - \langle x, z \rangle^2 - \langle y, z \rangle^2 - 2 \|x\|^2 \langle y, z \rangle - 2 \|z\|^2 \langle x, y \rangle - 2 \|y\|^2 \langle x, z \rangle$$

$$+ 2 \langle x, y \rangle \langle z, y \rangle + 2 \langle x, z \rangle \langle y, z \rangle + 2 \langle x, y \rangle \langle x, z \rangle \overset{\text{Analog}}{=} \|\overline{xz}\|^2 \|\overline{zy}\|^2 - \langle \overline{xz}, \overline{zy} \rangle^2$$

und somit

$$\|\overline{xy}\|^2 \cdot \left[1 - \frac{\langle \overline{xy}, \overline{yz} \rangle^2}{\|\overline{xy}\|^2 \|\overline{yz}\|^2} \right] = \frac{\|\overline{xy}\|^2 \|\overline{yz}\|^2 - \langle \overline{xy}, \overline{yz} \rangle^2}{\|yz\|^2} = \frac{\|\overline{xz}\|^2 \|\overline{zy}\|^2 - \langle \overline{xz}, \overline{zy} \rangle^2}{\|zy\|^2} = \|xz\|^2 \cdot \left[1 - \frac{\langle \overline{xz}, \overline{zy} \rangle^2}{\|xz\|^2 \|zy\|^2} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \|\overline{xy}\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{xyz})} = \|\overline{xz}\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{xzy})}$$

Da die Punkte x, y, z beliebig waren, muss das gleiche auch für a_x, a_y, a_z gelten, das heißt

$$\underbrace{\underbrace{\|\overline{a_x a_y}\|}_{k \cdot \|\overline{xy}\|} \cdot \underbrace{\sqrt{1 - \cos^2\left(\widehat{a_x a_y a_z}\right)}}_{\substack{\sqrt{1 - \cos^2(\widehat{xyz})} \\ \text{da } a \text{ Winkeltreu}}}}_{k \cdot \|\overline{xz}\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{xzy})}} = \|\overline{a_x a_z}\| \cdot \underbrace{\sqrt{1 - \cos^2\left(\widehat{a_x a_z a_y}\right)}}_{\substack{\sqrt{1 - \cos^2(\widehat{xzy})} \\ \text{da } a \text{ Winkeltreu}}}$$

Da x, y, z nicht kollinear sind, ist bekanntlich $\cos(\widehat{xzy}) \in (-1, 1)$ das heißt $\sqrt{1 - \cos^2(\widehat{xzy})} \neq 0$. Somit folgt

$$\|\overline{a_x a_z}\| = k \cdot \|\overline{xz}\|$$

Anschaulich: Für zwei Dreiecke $x\overset{\triangle}{y}z,\ a_x \overset{\triangle}{a_y} a_z$ mit gleichen entsprechenden Winkeln ($\rightarrow$ ähnlich) ist bekanntlich das jeweilige Verhältnis zweier entsprechenden Seiten für alle 3 Paare gleich.

Fall 2

Betrachten die kollinearen Punkte $y \neq x \neq z$ (das heißt $\overline{xy},\ \overline{xz}$ linear abhängig) mit $\|\overline{a_x a_y}\| = k \cdot \|\overline{xy}\|\,,\ k > 0$. Dann wählen einen Punkt w so dass $\overline{xw}$ und $\overline{xy}$ linear unabhängig sind (möglich, da $n \geq 2$). Dann gilt nach Fall 1: $\|\overline{a_x a_w}\| = k \cdot \|\overline{xw}\|$. Da auch $\overline{xw},\ \overline{xz}$ linear unabhängig sind, gilt dann auch $\|\overline{a_x a_z}\| = k \cdot \|\overline{xz}\|$.

Fall 3

Seien nun $x \neq y,\ z \neq w$ mit $\|\overline{a_x a_y}\| = k \cdot \|\overline{xy}\|\,,\ k > 0$. Dabei sei $x \neq w$ (der Fall $x = w$ entspricht Fall 01 und 02). Dann ist nach Fall 01 und 02: $\|\overline{a_x a_w}\| = k \cdot \|\overline{xw}\|$ und analog (Fall 01 & 02: $x \neq w \neq z$):

$$\|\overline{a_w a_z}\| = k \cdot \|\overline{wz}\|$$

□