Lineare Algebra II

FSU Jena - SS 2008

Serie 10 - Lösungen

Stilianos Louca

31. Juli 2008

Aufgabe 01

Seien a und b jeweils die Anzahl der angebauten Gemüsesorten in Hektar und $H := a + b$. Unter der Annahme dass Arbeitsstunden keinen direkten Verlust darstellen, ist der netto Gewinn G gegeben durch

$$G(a, b) = 36a + 45b$$

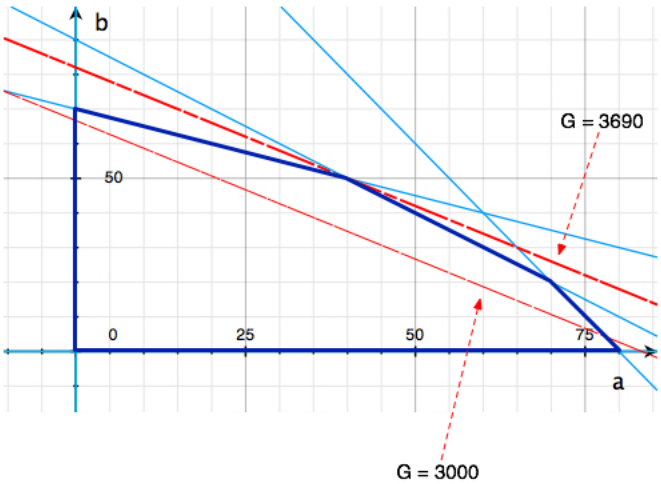
Dabei gelten die Bedingungen

$$\begin{aligned} &a + b \leq 90 \\ &10a + 5b \leq 800 \\ &3a + 6b \leq 420 \\ &0 \leq a, b \end{aligned}$$

Im folgenden sind die Geraden

$$a + b = 90,\ 10a + 5b = 800,\ 3a + 6b = 420$$

aufgetragen. Alle *zulässigen* Lösungen (a, b) befinden sich somit im entsprechenden unteren Teilraum, und ferner im 1. Quadrant.



Zu finden ist die Gerade $36a+45b = G$ mit maximalem G die noch einen gemeinsamen Punkt mit dem zulässigen Gebiet hat. Aus der Graphik ist ersichtlich: der entsprechende a-Wert entspricht genau dem Schnittpunkt der Geraden $3a+6b = 420,\ a+b = 90$. Dieser ergibt sich durch einfaches Auflösen als $a = 40$. Dabei beträgt der Gewinn genau $G = G(40, 90-40) = 3690$.

Variante

Seien a und b jeweils die Anzahl der angebauten Gemüsesorten in Hektar und $H := a + b$. Unter der Annahme dass Arbeitsstunden keinen direkten Verlust darstellen, ist der Gewinn G_A bzw. G_B durch das Gemüse A bzw. B gegeben durch

$$G_A(a) = 36a \ , \ G_B(b) = 45b$$

Zu erkennen ist: Ergibt sich für ein festes $H_0 < H$ für geeignete a_0, b_0 ein maximaler Gewinn, so ergibt sich für

$$a := \frac{H}{H_0} \cdot a_0, \ b := \frac{H}{H_0} \cdot b_0$$

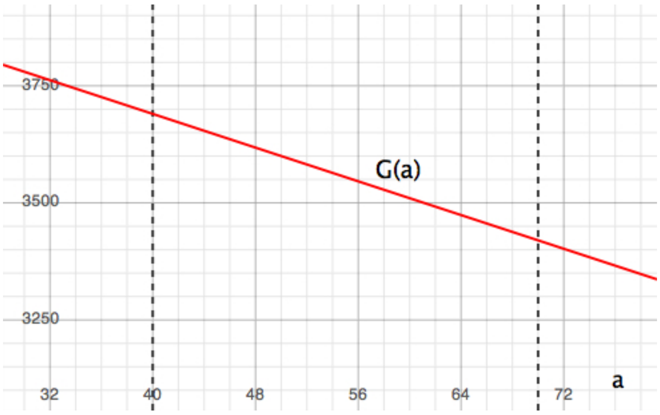
ein noch höherer Gewinn. Somit können wir o.B.d.A $H = 90$ ha annehmen. Dann ergeben sich direkt aus der Aufgabenstellung die Bedingungen:

$$3a + 6b = 3a + 6 \cdot (90 - a) = 540 - 3a \overset{!}{\leq} 420 \ \rightarrow \ a \overset{!}{\geq} 40$$

$$10a + 5b = 10a + 5 \cdot (90 - a) = 5a + 450 \overset{!}{\leq} 800 \ \rightarrow \ a \overset{!}{\leq} 70$$

und der netto-Gewinn G als

$$G(a) = G_A(a) + G_A(b(a)) = 36a + 45 \cdot (90 - a) = 45 \cdot 90 - 9a$$



Zu sehen ist: G wird für $a = 40$ maximal. Dabei beträgt der Gewinn genau $G(40) =$ €3690.

Aufgabe 02

Hilfsaussage 1

Für zwei Kegel C_1, C_2 sind auch $C_1 \cap C_2, \ C_1 \cup C_2, \ C_1 + C_2, \ (C_1 \setminus C_2) \cup \{0\}$ Kegel.
Beweis:

- Für $x \in C_1 \cap C_2, \ \lambda \geq 0$ ist auch $\lambda x \in C_1, \lambda x \in C_2$ also $\lambda x \in C_1 \cap C_2$.
- Für $x \in C_1 \cup C_2, \ \lambda \geq 0$ ist entweder $x \in C_1$ oder $x \in C_2$ (o.B.d.A $x \in C_1$), und somit $\lambda x \in C_1 \subset C_1 \cup C_2$.
- Für $x = c_1 + c_2 \in C_1 + C_2, \ c_i \in C_i, \ \lambda \geq 0$ ist $\lambda x = \underbrace{\lambda c_1}_{\in C_1} + \underbrace{\lambda c_2}_{\in C_2} \in C_1 + C_2$.
- Für $x \in (C_1 \setminus C_2) \cup \{0\}, \ \lambda \geq 0$ ist:
  i. Für $\lambda > 0$ sowohl $\lambda x \in C_1$ als auch $\lambda x \notin C_2$ (denn sonst wäre $x = \frac{1}{\lambda} \lambda x \in C_2$)
  ii. Für $\lambda = 0$ ohnehin $0x = 0 \in (C_1 \setminus C_2) \cup \{0\}$.

  Anders formuliert: Die Menge $C_1 \setminus C_2$ ist abgeschlossen bzgl. Multiplikation mit positiven Skalaren.

Hilfsaussage 2

Für einen Kegel C gilt: Es ist $x \in C^*$genau dann wenn $\langle x, a \rangle \leq 0 \ \ \forall\, a \in C$.
Beweis: Die eine Richtung ist klar! Sei also $x \in C^*$. Dann ist für jedes $a \in C : \langle x, a \rangle \leq 1$. Insbesondere für $\lambda \geq 0$ ist auch $\lambda a \in C$, das heißt

$$\lambda \langle x, a \rangle = \langle x, \lambda a \rangle \leq 1$$

Lassen wir nun $\lambda \to \infty$ gehen, so ist ersichtlich dass $\langle x, a \rangle \leq 0$ sein muss, da stets $\lambda \langle x, a \rangle \leq 1$ ist.

Hilfsaussage 3

Für einen Kegel C ist auch C^* ein Kegel.
Beweis: Ist $x \in C^*$ so gilt wegen Hilfsaussage 2: $\langle x, y \rangle \leq 0 \ \ \forall\, y \in C$. Für beliebiges $\lambda \geq 0$ ist dann auch

$$\forall\, y \in C : \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\leq 0} \leq 0$$

das heißt $\lambda x \in C^*$.

a) **Zeigen:** $(C_1 \cap C_2)^* = C_1^* + C_2^*$ Der Fall $C_1 = \emptyset$ (bzw. $C_2 = \emptyset$) ist trivial, denn

$$(C_1 \cap C_2)^* = (\emptyset \cap C_2)^* = \emptyset^* = \mathbb{R} = \mathbb{R} + \underbrace{C_2^*}_{\ni 0} = \emptyset^* + C_2^* = C_1^* + C_2^*$$

Seien also $C_1, C_2 \neq \emptyset$.

- Sei $x = \underbrace{c_1}_{\in C_1^*} + \underbrace{c_2}_{\in C_2^*} \in C_1^* + C_2^*$. Dann ist für $y \in C_1 \cap C_2$:

$$\langle x, y \rangle = \underbrace{\langle c_1, y \rangle}_{\substack{\leq 0 \\ \text{da } y \in C_1}} + \underbrace{\langle c_2, y \rangle}_{\substack{\leq 0 \\ \text{da } y \in C_2}} \leq 0$$

  das heißt $x \in (C_1 \cap C_2)^*$ und somit $C_1^* + C_2^* \subset (C_1 \cap C_2)^*$.
- Sei $x \in (C_1 \cap C_2)^*$ (unvollständig)

Zeigen: $(C_1 + C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*$
Der Fall $C_1 = \emptyset$ ist ausgeschlossen, denn z.B. für $n = 1,\ C_2 = \mathbb{R}$ ist $C_2^* = \{0\}$ und somit

$$(C_1 + C_2)^* = \emptyset^* = \mathbb{R} \neq \{0\} = \mathbb{R} \cap \{0\} = \emptyset^* \cap \mathbb{R}^* = C_1^* \cap C_2^*$$

Analog ist auch $C_2 = \emptyset$ ausgeschlossen. Seien also $C_1, C_2 \neq \emptyset$.

- Sei $x \in C_1^* \cap C_2^*$, das heißt nach Hilfsaussage 1 und 2: $\langle x, a \rangle \leq 0 \ \ \forall\, a \in C_1 \ \wedge\ \langle x, b \rangle \leq 0 \ \ \forall\, b \in C_2$, und somit

$$\langle x, a + b \rangle = \underbrace{\langle x, a \rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\langle x, b \rangle}_{\leq 0} \leq 0 \ \ \forall\, a \in C_1, b \in C_2$$

  also $\langle x, c \rangle \leq 0 \ \ \forall\, c \in C_1 + C_2$ und somit $C_1^* \cap C_2^* \subset (C_1 + C_2)^*$.
- Sei $x \in (C_1 + C_2)^*$, das heißt $\langle x, c_1 + c_2 \rangle \leq 1 \ \ \forall\, c_i \in C_i$. Insbesondere für $c_2 = 0$ (da $C_2 \neq \emptyset$ Kegel ist für ein Element $c_2' \in C_2$ auch $0 = 0 \cdot c_2' \in C_2$) folgt dann

$$\langle x, c_1 + c_2 \rangle = \langle x, c_1 \rangle \leq 1 \ \ \forall\, c_1 \in C_1$$

  Analog ist auch $\langle x, c_2 \rangle \leq 1 \ \ \forall\, c_2 \in C_2$ das heißt $x \in C_1^* \cap C_2^*$ und somit $(C_1 + C_2)^* \subset C_1^* \cap C_2^*$.

b) In Teil (c) wird <u>ohne</u> Verwendung der Konvexität von $C_1^* \cup C_2^*$ gezeigt: $C_1^* \cup C_2^* = (C_1 \cap C_2)^*$. Nach Übungsserie 08 ist $(C_1 \cap C_2)^*$ konvex.

c) **Zeigen:** $(C_1 \cap C_2)^* = C_1^* \cup C_2^*$

- Aus Übungsserie 8 ist bekannt:
$$C_1^* \cup C_2^* \subset (C_1 \cap C_2)^*$$
- Sei nun $x \in (C_1 \cap C_2)^*$, das heißt $\langle x, a\rangle \leq 1 \ \ \forall\ a \in C_1 \cap C_2$. Annahme: $x \notin C_1^* \cup C_2^*$, das heißt $\exists\ a \in C_1, b \in C_2$ mit $\langle x, a\rangle > 1 \ \wedge \ \langle x, b\rangle > 1$. Da $C_1 \cup C_2$ konvex ist, ist die Verbindungsstrecke $[a, b] \subset C_1 \cup C_2$, das heißt
$$\forall\ t \in [0,1] : ta + (1-t)b \in C_1 \cup C_2 \quad (*)$$
und es gilt
$$\langle x, ta + (1-t)b\rangle = t \underbrace{\langle x, a\rangle}_{\geq 1} + (1-t) \underbrace{\langle x, b\rangle}_{\geq 1} \geq t + (1-t) = 1 \quad (**)$$
- Sei
$$t_1 := \sup \underbrace{\{t \in [0,1] : ta + (1-t)b \in C_1\}}_{T_1}\ ,\ t_2 := \inf \underbrace{\{t \in [0,1] : ta + (1-t)b \in C_2\}}_{T_2}$$
Da C_1, C_2 abgeschlossen sind, müssen $t_1 \in T_1,\ t_2 \in T_2$ sein. Dabei ist klar: $t_2 \leq t_1$, denn sonst gäbe es ein $t \in (t_1, t_2)$ mit $ta + (1-t)b \notin C_1 \ \wedge \ ta + (1-t)b \notin C_2$ das heißt $at + (1-t)b \notin C_1 \cup C_2$, was ein Widerspruch zu (*) wäre.
- Da C_2 konvex ist, ist $\underbrace{[ta + (1-t)b, b]}_{\substack{\text{entspricht} \\ 1 \geq t \geq t_2}} \subset C_2$. Somit haben wir ein $t_1 \in [0,1]$ gefunden so dass $t_1 a + (1-t_1)b \in C_1 \cap C_2$, das heißt nach Voraussetzung an x: $\langle x, t_1 a + (1-t_1)b\rangle \leq 1$, was ein Widerspruch zu (**) ist.
Somit ist war die Annahme falsch, also $(C_1 \cap C_2)^* \subset C_1^* \cup C_2^*$.

Zeigen: $(C_1 \cup C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*$
Dies wurde schon in Übungsserie 08 für beliebige Mengen C_1, C_2 gezeigt.

Aufgabe 03

Annahme: Es herrsche das Standardskalarprodukt.

Vorbetrachtung

Betrachten zunächst ein beliebiges Polytop $P = \operatorname{conv}(S) \subset \mathbb{R}^n,\ S = \{x_1, .., x_m\}$. Dann gilt:
$$S^* = P^*$$

Beweis: Wegen $S \subset P$ gilt bekanntlich $P^* \subset S^*$. Für $x \in S^*$, das heißt $\langle x, x_i\rangle \leq 1 \ \ \forall\ x_i \in S$, folgt:
$$\forall\ \lambda_1, .., \lambda_m \geq 0,\ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 : \left\langle x, \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{\langle x, x_i\rangle}_{\leq 1} \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$
das heißt $x \in \operatorname{conv}(S)^* = P^*$. Somit ist $S^* \subset P^*$ also $S^* = P^*$.
Ferner ist aus Übungsserie 08 bekannt: Für eine beliebige Menge A ist
$$A^* = \bigcap_{x \in A} \{x\}^*$$
das heißt insbesondere für das Polytop $P = \operatorname{conv}(S)$:
$$P^* = \bigcap_{k=1}^m \{x_k\}^*$$
Das Dual einer aus einem einzigen Punkt x bestehenden Menge ist definitionsgemäß gegeben durch
$$\{x\}^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x\rangle \leq 1\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\widehat{xy}) \leq 1\}$$

Ist $x = 0$ so ist $\{x\}^* = \mathbb{R}^n$. Andererseits ist $y \in \{x\}^*$ genau dann wenn

$$\langle y, x\rangle \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \left\langle y - \frac{x}{\|x\|^2}, x \right\rangle = \underbrace{\langle y, x\rangle}_{\leq 1} - \underbrace{\left\langle \frac{x}{\|x\|^2}, x \right\rangle}_{1} \leq 0$$

das heißt für die Orthogonalprojektion $P_x(y')$ von $y' := y - \dfrac{x}{\|x\|^2}$ auf $\operatorname{span}\{x\}$ ($P_x y' = \lambda x$) muss gelten $\lambda \leq 0$. Anschaulich: y liegt *hinter* der Hyperebenen $\tilde{x} + \{x\}^\perp$, wobei $\tilde{x} := \dfrac{x}{\|x\|^2}$.
Algebraisch Formuliert ist $\{x\}^*$ genau der abgeschlossene Halbraum

$$\left\{ y \in \mathbb{R}^n : y^i x^i \leq 1 \right\}$$

Das Dual eines Polytops ist also, als Schnitt endlich vieler Halbräume, eine Polyedrische Menge.

Berechnung der Duale

a) Betrachten beliebiges konvexes Polygon $P \subset \mathbb{R}^2$, das heißt $P = \operatorname{conv}(\underbrace{\{x_1, .., x_m\}}_{S})$. Dann ergibt sich P^* nach obigen Überlegungen als Schnitt von m Halbräumen:

$$P^* = S^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : Ay \overset{\text{Punktweise}}{\leq} (1, .., 1) \right\} \;,\; A = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^1 & \dots & x_m^n \end{pmatrix}$$

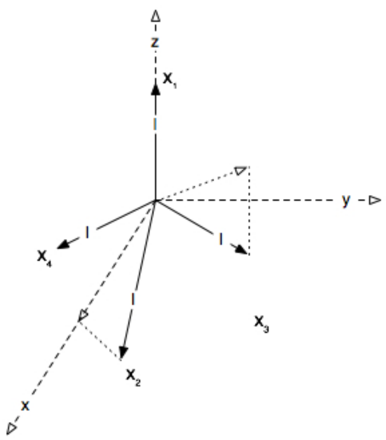
und ist somit eine Polyedrische Menge.

b) **Tetraeder**
Das Tetraeder sei gegeben durch

$$P = \operatorname{conv}(S),\; S = \{x_1, .., x_4\}$$

wobei dessen Zentrum in 0 sitze, und o.B.d.A $x_1 = l\vec{e}_3$ sei und x_2 in der XZ Ebene sitze. Dabei nennen: l *Achsenlänge* des Tetraeders. Dann ergibt sich, unter Verwendung der Ergebnisse in Übungsserie 06:

$$x_1 = l\vec{e}_3,\; x_2 = \frac{\sqrt{8}}{3} \cdot l\vec{e}_1 - \frac{1}{3} \cdot l\vec{e}_3,\; x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot l\vec{e}_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot l\vec{e}_2 - \frac{1}{3} \cdot l\vec{e}_3,\; x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot l\vec{e}_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot l\vec{e}_2 - \frac{1}{3} \cdot l\vec{e}_3$$



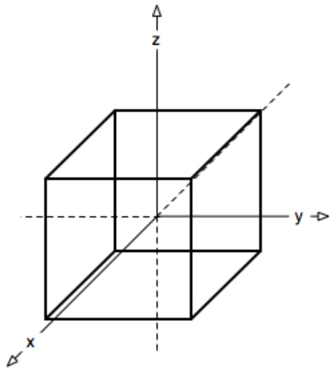
Dann ergibt sich analog zu vorhin:

$$P^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : Ay \overset{\text{Punktweise}}{\leq} (1, .., 1) \right\},\; A = \frac{l}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \sqrt{8} & 0 & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{6} & -1 \end{pmatrix}$$

Anschaulich: P^* ergibt sich als der Schnitt aller abgeschlossenen Halbräume, deren Rand die senkrecht auf den jeweiligen x_i stehenden und in $\frac{x_i}{\|x_i\|^2} = \frac{x_i}{l^2} = \tilde{x}_i$ schneidenden Ebenen sind. Durch Aufgabe 04 ergibt sich: P^* ist ebenfalls ein Polytop mit 4 Facetten. Aufgrund von Symmetriegründen ist somit P^* ebenfalls ein Tetraeder, mit Achsenlänge $\frac{3}{l}$.

Würfel:
Der Würfel (Kantenlänge $2a$) sei gegeben durch $P = \operatorname{conv}\left(\{x_{ijk}\}_{i,j,k=1}^2\right)$, mit

$$x_{ijk} := (-1)^i a \cdot \vec{e}_1 + (-1)^j a \cdot \vec{e}_2 + (-1)^k a \cdot \vec{e}_3$$



Dann ergibt sich

$$P^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : Ay \overset{\text{Punktweise}}{\leq} (1,..,1) \right\} \;,\; A = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Anschaulich: Durch obige Überlegungen ist P^* genau das Oktaeder, dessen (ijk)-te Facette senkrecht auf $\tilde{x}_{ijk}$ steht und den Punkt $\tilde{x}_{ijk} = \frac{x_{ikl}}{a^2}$ enthält.

Oktaeder:
Das Oktaeder sei gegeben durch $P = \operatorname{conv}(\{x_1,..,x_6\})$, mit

$$x_{1,2} = \pm a \cdot \vec{e}_1,\; x_{3,4} = \pm a \cdot \vec{e}_2,\; x_{5,6} = \pm a \cdot \vec{e}_3$$

Analog zu vorhin ist dann

$$P^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : Ay \overset{\text{Punktweise}}{\leq} (1,..,1) \right\} \;,\; A = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Da A bzw. die durch ihr erzeugte Bilinearform a symmetrisch ist, kann sie diagonalisiert werden, das heißt es existiert eine Orthonormalbasis $B := \{b_1,..,b_n\}$ mit $Ab_i = \lambda_i b_i$, also

$$a(b_i, b_j) = \lambda_j b_i^T b_j = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}$$

Da A positiv definit ist, müssen die $\lambda_i > 0$ sein. Sei

$$\mathcal{E} := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x,x) \leq 1\}$$

das betrachtete Ellipsoid. Definieren die Bilinearform $a^* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gemäß $a(b_i, b_j) := \dfrac{1}{\lambda_i}\delta_{ij}$ (und setzen linear fort). Dann ist offensichtlich a^* auch eine symmetrische, positiv definite Bilinearform.
Es gilt:

$$\boxed{\mathcal{E}^* = \{x \in \mathbb{R}^n : a^*(x,x) \leq 1\} =: \tilde{\mathcal{E}}}$$

Beweis: Zu zeigen wären beide Inklusionsrichtungen.

- Aus Übungsserie 08 ist bekannt: $0 \in \mathcal{E}^*$. Andernfalls ist $a^*(0,0) = 0$ das heißt $0 \in \tilde{\mathcal{E}}$.
- Sei $0 \neq x = x^i b_i \in \mathcal{E}^*$, das heißt $\langle x, y\rangle \leq 1 \ \forall \ y \in \mathcal{E}$. Dann ist zum einen

$$a^*(x,x) = a^*(x^i b_i, x^j b_j) = x^i x^j \underbrace{a^*(b_i, b_j)}_{\frac{\delta_{ij}}{\lambda_i}} = \sum_i \frac{x^i x^i}{\lambda_i} > 0$$

  Setzen wir andernfalls

$$y := \frac{1}{\sqrt{\sum_j \frac{x^j x^j}{\lambda_j}}} \cdot \sum_i \frac{x^i}{\lambda_i} b_i$$

  so gilt wegen

$$a(y,y) = a(y^i b_i, y^j b_j) = y^i y^j \lambda_{ij}\delta_{ij} = \sum_i y^i y^i \lambda_i = \sum_i \frac{x^i x^i \lambda_i}{\left(\lambda_i \sqrt{\sum_j \frac{x^j x^j}{\lambda_j}}\right)^2} = \frac{1}{\sum_j \frac{x^j x^j}{\lambda_j}} \cdot \sum_i \frac{x^i x^i}{\lambda_i} = 1 \quad \to \quad y \in \mathcal{E}$$

  nach Voraussetzung

$$1 \overset{x\in\mathcal{E}^*}{\geq} \langle x, y\rangle = x^i y^j \underbrace{\langle b_i, b_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_i x^i y^i = \frac{1}{\sqrt{\sum_j \frac{x^j x^j}{\lambda_j}}} \cdot \underbrace{\sum_i \frac{x^i x^i}{\lambda_i}}_{a^*(x,x)} \ \to \ a^*(x,x) \leq \sqrt{a^*(x,x)}$$

  Doch dies ist nur möglich für $a^*(x,x) \leq 1$, das heißt $x \in \tilde{\mathcal{E}}$ und somit $\mathcal{E}^* \subset \tilde{\mathcal{E}}$.

  Nebenbemerkung: Auf den Ansatz für y kommt man durch durch Maximierung von $f(y) := \langle x, y\rangle$ unter der Nebenbedingung $a(y,y) = 1$ (vgl. Lagrange Multiplikatormethode).
- Sei andernfalls $x = x^i b_i \in \tilde{\mathcal{E}}$, das heißt $a^*(x,x) \leq 1$ und $y = y^i b_i \in \mathcal{E}$ beliebig, das heißt $a(y,y) \leq 1$. Dann ist:

$$\langle x, y\rangle = \sum_i x^i y^i \leq \sum_i \left|x^i y^i\right| \overset{\lambda_i \geq 0}{=} \sum_i \left|\frac{x^i}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot y^i \sqrt{\lambda_i}\right| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \sqrt{\sum_i \left|\frac{x^i}{\sqrt{\lambda_i}}\right|^2} \cdot \sqrt{\sum_i \left|y^i \sqrt{\lambda_i}\right|^2}$$

$$= \sqrt{\sum_i \frac{x^i x^i}{\lambda_i}} \cdot \sqrt{\sum_i y^i y^i \lambda_i} = \sqrt{x^i x^j \cdot \frac{\delta_{ij}}{\lambda_i}} \cdot \sqrt{y^i y^j \cdot \lambda_i \delta_{ij}} = \sqrt{x^i x^j a^*(b_i, b_j)} \cdot \sqrt{y^i y^j a(b_i, b_j)}$$

$$= \underbrace{\sqrt{a^*(x,x)}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\sqrt{a(y,y)}}_{\leq 1} \leq 1$$

  also $x \in \mathcal{E}^*$. Somit ist $\tilde{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E}^*$.

Somit ist das Dual eines Ellipsoids selbst ein Ellipsoid.

Bemerkung

Die der Bilinearform entsprechende Matrix A^* ist genau die Inverse zu A, denn

$$AA^*b_i = A\frac{b_i}{\lambda_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i}b_i = b_i \;\rightarrow\; AA^* = \mathrm{Id}$$

Für ein $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$a(x,x) = x^T Ax \overset{A \text{ diagonal}}{=} x^T A^T x = (Ax)^T x = (Ax)^T \underbrace{A^{-1}A}_{\mathrm{Id}} x \overset{A^{-1}=A^*}{=} (Ax)^T A^*(Ax) = a^*(Ax, Ax)$$

das heißt es ist $x \in \mathcal{E}$ genau dann wenn $Ax \in \tilde{\mathcal{E}}$ ist. Somit bildet A das Ellipsoid $\mathcal{E}$ auf das Ellipsoid $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^*$ ab.

Variante: Betrachten den bijektiven Endomorphismus $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, der bzgl. der Basis B als die Matrix

$$T = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$$

Da Symmetrisch, ist T selbstadjungiert, und bildet ferner das Ellipsoid $\mathcal{E}$ (Hauptachsenlängen $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$) bijektiv auf die Kugel B_1 ab. Bekanntlich ist $B_1^* = B_1$ so dass gilt:

$$x \in \mathcal{E}^* \;\Leftrightarrow\; \left\langle Ty, T^{-1}x\right\rangle = \left\langle (T^{-1})^*Ty, x\right\rangle = \left\langle (T^*)^{-1}Ty, x\right\rangle \overset{T=T^*}{=} \left\langle T^{-1}Ty, x\right\rangle = \langle y, x\rangle \leq 1 \;\; \forall\, y \in \mathcal{E}$$

$$\Leftrightarrow\; \left\langle z, T^{-1}x\right\rangle \leq 1 \;\; \forall\, z \in T(\mathcal{E}) = B_1 \;\Leftrightarrow\; T^{-1}x \in B_1^* = B_1 \;\Leftrightarrow\; x \in T(B_1) = \tilde{\mathcal{E}}$$

das heißt $\mathcal{E}^* = \tilde{\mathcal{E}}$.

Aufgabe 04

Diese Aussage ist mit der Vorlesungsdefinition für ein Polytop Falsch.
Gegenbeispiel 1: Die Ein-Punktmenge $P = \{0\}$ ist ein Polytop. Jedoch ist $P^* = \mathbb{R}^n$ offensichtlich kein Polytop.
Gegenbeispiel 2: Selbst für ein vollständig im 1. Oktanten liegendes Tetraeder $P = \operatorname{conv}\{x_1, .., x_4\} \subset \mathbb{R}^3,\; x_i^j > 0$ enthält das Dual von P den vollständigen 8. Oktanten

$$\mathcal{O}_8 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x^i < 0,\; i = 1,2,3\right\}$$

denn für jedes $x \in \mathcal{O}_8$ und jedes $y \in P$ ist

$$\langle x, y\rangle = \underbrace{x^i}_{<0} \cdot \underbrace{y^i}_{>0} < 0 \leq 1$$

das heißt $x \in P^*$. Somit ist P insbesondere nicht beschränkt, also kein Polytop!
Weitere Betrachtung: Wir haben schon in Aufgabe 03 gesehen: Für ein Polytop $P = \operatorname{conv}\{x_1, .., x_m\}$ ist

$$P^* = \bigcap_{k=1}^{m} \{x_k\}^*$$

wobei die $\{x\}^*$ jeweils abgeschlossene Halbräume (bzw. der $\mathbb{R}^n \to$ o.B.d.A $x_k \neq 0$) sind. Demnach ist P^* Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume, also eine polyedrische Menge. Ist P^* ferner beschränkt, so ist P^* ein Polytop (vgl. Vorlesung).

Es sei nun zusätzlich erfordert dass $0 \in \operatorname{int}(P)$ ist, das heißt es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0) \subset P$.
Behauptung: Dann ist P^* beschränkt.
Beweis: Wäre P^* nicht beschränkt, dann gäbe es ein $x \in P^*$ mit $\|x\| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ so dass gelten würde:

$$\left\langle x, \varepsilon\frac{x}{\|x\|}\right\rangle = \frac{\varepsilon}{\|x\|} \cdot \|x\|^2 = \varepsilon \underbrace{\|x\|}_{>\frac{1}{\varepsilon}} > 1$$

Da aber $\varepsilon\dfrac{x}{\|x\|} \in B_\varepsilon(0) \subset P$ ist, ist dies ein Widerspruch zu $x \in P^*$.
Somit ist in dem Fall P^* ein Polygon.