

10. Übungsserie zur Vorlesung „Lineare Algebra und Analytische Geometrie II“

Sommersemester 2008, Prof. V. Matveev

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Ein Bauer besitzt 90ha Land für den Anbau zweier Gemüsesorten A und B . Das Saatgut kostet 10€/ha für Sorte A und halb soviel für Sorte B , wobei der Bauer nicht mehr als 800€ für Saatgut ausgeben möchte. Der Gemüseanbau erfordert 3h/ha Arbeitszeit für Sorte A und doppelt soviel für Sorte B . Allerdings kann er höchstens 420 Arbeitsstunden aufwenden. Wieviel von jeder Sorte sollte der Bauer anbauen, wenn der Gewinn 36€/ha für Sorte A und 45€/ha für Sorte B beträgt? Wieviel verdient er dabei?

Hinweis: Stellen Sie den Sachverhalt grafisch dar.

Aufgabe 2

(1+2+1 Punkte)

Eine Menge $C \in \mathbb{R}^n$ heißt Kegel, falls $\lambda c \in C$ für alle $c \in C$ und $\lambda \geq 0$. Zeigen Sie für zwei abgeschlossene konvexe Kegel C_1 und C_2

$$(a) (C_1 \cap C_2)^* = C_1^* + C_2^* \quad \text{und} \quad (C_1 + C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*.$$

Zeigen Sie weiterhin, dass für konvexes $C_1 \cup C_2$ gilt:

$$(b) C_1^* \cup C_2^* \text{ konvex,}$$

$$(c) (C_1 \cap C_2)^* = C_1^* \cup C_2^* \quad \text{und} \quad (C_1 \cup C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*.$$

Aufgabe 3

(1+1+2 Punkte)

Berechnen Sie das Dual

$$(a) \text{ eines konvexen Polygons im } \mathbb{R}^2.$$

$$(b) \text{ eines regelmäßigen Tetraeders, eines Würfels sowie eines Oktaeders im } \mathbb{R}^3 \text{ mit Schwerpunkt jeweils im Ursprung.}$$

$$(c) \text{ eines Ellipsoids im } \mathbb{R}^n. \text{ Ein Ellipsoid ist die Menge aller Punkte } x \in \mathbb{R}^n \text{ für die } x^T A x \leq 1, \text{ wobei } A \text{ die Gramsche Matrix einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform ist.}$$

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Beweisen Sie, dass das Dual eines Polytops ein Polytop ist und dass im \mathbb{R}^{n+1} die Anzahl der k -Facetten des dualen Polytops gleich der Anzahl der $(n - k)$ -Facetten des Ausgangspolytops ist.