Lineare Algebra II

FSU Jena - SS 2008

Serie 09 - Lösungen

Stilianos Louca

19. Juni 2008

Notationen

- Für zwei Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$: $[a,b] := ab$ die Strecke von a nach b und $(a,b) := \text{relint}(ab)$.

Aufgabe 01

Betrachten den linearen Raum $V = \mathbb{R}^n$, den linearen Unterraum $U \subset V$ und den affinen Unterraum $\mathscr{A}$ über U mit $\mathscr{A} = x_0 + U$ für ein festes $x_0 \in \mathscr{A}$. Dazu sei $P : V \to V$ ein Projektor auf U (das heißt $P \in \mathcal{L}(V,V)$ und $P^2 = P$) und dementsprechend $\Pi : V \to V$ ein Projektor auf $\mathscr{A}$, definiert gemäß

$$\Pi(v) := x_0 + P(\overline{x_0 v}) \ , \ v \in V$$

Sei nun $K \subset V$ eine offene, konvexe Menge.

Konvexität

Seien $x, y \in \Pi(K)$ und $t \in [0,1]$ beliebig, das heißt $\exists\ v, w \in K : \Pi(v) = x,\ \Pi(w) = y$. Dann gilt:

$$\Pi[tv + (1-t)w] = x_0 + P\left[\overline{x_0(tv + (1-t)w)}\right] = x_0 + P[tv + (1-t)w - x_0] = x_0 + P[t(v - x_0) + (1-t)(w - x_0)]$$

$$= x_0 + P[t(v - x_0)] + P[(1-t)(w - x_0)] = x_0 + P(t\overline{x_0 v}) + P((1-t)\overline{x_0 w}) = x_0 + tP(\overline{x_0 v}) + (1-t)P(\overline{x_0 w})$$

$$= t\underbrace{[x_0 + P(\overline{x_0 v})]}_{x} + (1-t)\underbrace{[x_0 + P(\overline{x_0 w})]}_{y} = tx + (1-t)y$$

Doch da K konvex ist, muss $tv + (1-t)w \in K$ sein. Somit ist auch $tx + (1-t)y \in \Pi(K)$, also $\Pi(K)$ konvex.

Relative Offenheit

Betrachten die Menge $\Pi(K)$. Es ist klar dass $\Pi(K) \subset \mathscr{A}$ ist, denn $\Pi(K) = x_0 + \underbrace{P(-x_0 + K)}_{\subset U}$. Somit ist

$$\Pi(K) = \Pi(K) \cup \emptyset = [\mathscr{A} \cap \Pi(K)] \cup [\mathscr{A} \cap (V \setminus \mathscr{A})] = \mathscr{A} \cap \underbrace{[\Pi(K) \cup (V \setminus \mathscr{A})]}_{\mathscr{O}}$$

Zu zeigen wäre: $\mathscr{O}$ ist offen, das heißt zu $x \in \mathscr{O}$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \mathscr{O}$.
Bemerken:

- Es ist $\mathscr{A}$ abgeschlossen.
  Beweis: Bekanntlich ist jeder Unterraum eines endlich dimensionalen Raumes, also insbesondere U, abgeschlossen, das

heißt aus $x_n \to x,\ x_n \in U$ folgt $x \in U$. Dann folgt aber aus $x_n \to x,\ x_n = x_0 + \underbrace{x'_n}_{\in U} \in \mathscr{A}$ auch $x \in \mathscr{A}$, denn

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 + \underbrace{\lim_{n\to\infty} x'_n}_{\in U} \in \mathscr{A}$$

- Somit ist das Komplement $V \setminus \mathscr{A}$ offen.
- Es genügt somit zu zeigen: Für $x \in \Pi(K)$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \mathscr{O}$ (da die Eigenschaft für $x \in V \setminus \mathscr{A}$ ohnehin erfüllt ist).
- Aufgrund der Konstruktion von $\mathscr{O}$ genügt es sogar zu zeigen: Für $x \in \Pi(K)$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \cap \mathscr{A} \subset \Pi(K)$, denn dann ist auch

$$B_\varepsilon(x) = \underbrace{[B_\varepsilon(x) \cap \mathscr{A}]}_{\subset \Pi(K) \subset \mathscr{O}} \cup \underbrace{[B_\varepsilon(x) \setminus \mathscr{A}]}_{\subset V \setminus \mathscr{A} \subset \mathscr{O}} \subset \mathscr{O}$$

Bezeichnung: $\Pi(K)$ ist offen in $\mathscr{A}$.

Sei also $x = \Pi(y) \in \Pi(K) \subset \mathscr{A},\ y \in K,\ B_\varepsilon(y) \subset K$ mit $\varepsilon > 0$ (möglich, da K offen), und $z \in B_\varepsilon(x) \cap \mathscr{A}$, das heißt $(z - x) \in U$ (da $z, x \in \mathscr{A}$) und $\|z - x\| \leq \varepsilon$. Dann gilt zum einen $y + (z - x) \in B_\varepsilon(y) \subset K$ und zum anderen

$$\Pi(y + (z - x)) = x_0 + P(y + (z - x) - x_0) = \underbrace{x_0 + P(y - x_0)}_{\Pi(y)=x} + P(z - x) = x + P(z - x)$$

Wegen $(z - x) \in U = \operatorname{image} P$ und $P^2 = P$ muss gelten $P(z - x) = (z - x)$, das heißt

$$\Pi(\underbrace{y + (z - x)}_{\in K}) = x + (z - x) = z \quad \Rightarrow \quad z \in \Pi(K)$$

Somit ist $B_\varepsilon(x) \cap \mathscr{A} \subset \Pi(K)$, und nach obigen Überlegungen $\Pi(K)$ relativ offen. $\square$

Beispiel 1

Es sei $V = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{A} := \operatorname{aff}(\vec{e}_1)$ und $P : V \to V$ die Projektion

$$P(v) := (v^1, 0, .., 0)\ ,\ v = (v^1, .., v^n) \in V$$

Offensichtlich ist P eine Projektion auf $\mathscr{A}$ (da $P \in \mathcal{L}(V, V),\ P^2 = P$ und $P(\mathbb{R}^n) = \mathscr{A}$). Für die abgeschlossene Menge $\mathbb{R}^n$ gilt: $P(\mathbb{R}^n) = \mathscr{A}$, und $\mathscr{A}$ ist relativ offen (zu sich selbst), denn $\mathscr{A} = \mathscr{A} \cap \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{offen}}$.

Beispiel 2

Betrachten den Raum $V = \mathbb{R}^2$, den affinen Unterraum $\mathscr{A} = \mathbb{R} \times \{0\}$ und die Projektion $P : V \to V$, definiert durch $P(x, y) = (x, 0)$ (vgl. Beispiel 1). Die Projektion $\Pi(\Gamma)$ des (abgeschlossenen) Graphs Γ der Kurve

$$\gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2\ ,\ \gamma(t) := \left(t, \frac{1}{1 - |x|}\right)$$

ist genau das Intervall $(-1, 1)$. Doch dies ist in $\mathscr{A}$ relativ offen, denn

$$(-1, 1) = \mathscr{A} \cap \underbrace{[(-1, 1) \times \mathbb{R}]}_{\text{offen}}$$

Aufgabe 02

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, konvexe Menge, mit $0 \in K$.

Vorbetrachtung

a) Zu $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass $\varepsilon x \in K$ ist (da K offen und $0 \in K$).

b) Nennen für $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$:
$$r_x := \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon x \in K\}$$
Da K endlich ist, ist auch r_x endlich, und nach obiger Überlegung sogar $r_x > 0$.

c) Es ist $r_x x \notin K$, denn:
Sonst gäbe es aufgrund der Offenheit von K ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(r_x x) \subset K$ also $(\varepsilon + \delta)x \in K$ was ein Widerspruch zum Supremum ist.

d) Für jedes $0 \leq \varepsilon < r_x$ ist $\varepsilon x \in K$, denn:
Aufgrund der Definition des Supremums existiert ein $\varepsilon' \in [\varepsilon, r_x)$ mit $\varepsilon' x \in K$. Doch da K konvex ist, muss die gesamte Strecke $\underbrace{[0, \varepsilon' x]}_{\ni \varepsilon x} \subset K$ liegen.

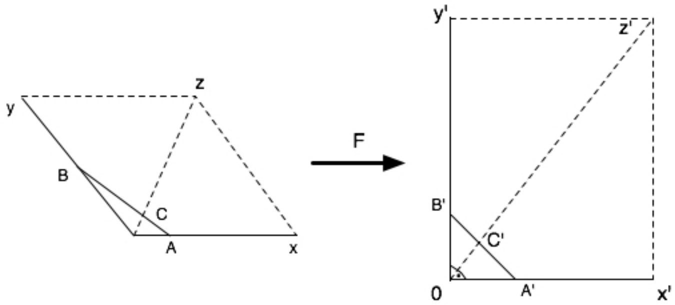
e) Es ist $r_x > 1$ genau dann wenn $x \in K$ ist, denn:
Ist $r_x > 1$ so ist nach (d) insbesondere $x = 1 \cdot x \in K$.
Ist $x \in K$ so ist $1 \cdot x \in K$ also $r_x \geq 1$. Doch $r_x = 1$ ist ausgeschlossen, da nach (c) $r_x x \notin K$ sein muss.

f) Für $\lambda > 0$ ist $r_{\lambda x} = \dfrac{r_x}{\lambda}$, denn:
$$r_{\lambda x} = \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon \lambda x \in K\} = \sup\left\{\frac{\varepsilon}{\lambda} > 0 : \varepsilon x \in K\right\} = \frac{1}{\lambda}\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon x \in K\} = \frac{r_x}{\lambda}$$

g) Für $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\frac{1}{r_{x+y}} \leq \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y}$ denn:
Sind x und y linear abhängig ($y = \alpha x$) so ist:

- Für $\alpha > 0$:
$$\frac{1}{r_{x+y}} = \frac{1}{r_{(\alpha+1)x}} \overset{(f)}{=} \frac{\alpha+1}{r_x} = \frac{\alpha}{r_x} + \frac{1}{r_x} \overset{(f)}{=} \frac{1}{r_{\alpha x}} + \frac{1}{r_x} = \frac{1}{r_y} + \frac{1}{x}$$
- Für $\alpha = 0$: klar, denn dann ist $y = 0 \;\rightarrow\; r_{x+y} = r_x$.
- Für $-1 < \alpha < 0$ ist $(1 + \alpha) > 0$ und somit
$$\frac{1}{r_{x+y}} = \frac{1}{r_{(1+\alpha)x}} \overset{(f)}{=} \frac{\overbrace{1+\alpha}^{\in(0,1)}}{r_x} < \frac{1}{r_x} \leq \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y}$$
- Für $\alpha < -1$ ist $x = \frac{1}{\alpha}y,\ \frac{1}{\alpha} > -1$, also auf die vorigen Fälle zurückführbar $(x \to y,\ y \to x)$.

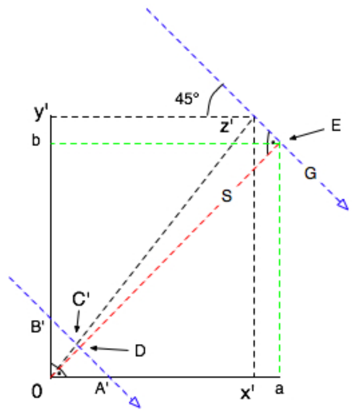
Sind x, y linear unabhängig so sei $\varepsilon \in (0,1)$ (erstmal beliebig) und $A := \varepsilon r_x x, B := \varepsilon r_y y \overset{(d)}{\in} K$. Dann existiert bekanntlich eine Affinität $F : \mathrm{aff}\{0, A, B\} \to \mathbb{R}^2$ mit
$$0 = F(0),\ A' := F(A) = \vec{e}_x \ \text{ und } \ B' := F(B) = \vec{e}_y$$
Für $x' := F(x),\ y' := F(y),\ z := x + y$ ist dann auch
$$F(z) = F(0 + x + y) = F(0 + x) + F(x) = F(0) + F(x) + F(y) = x' + y' =: z'$$
und für der Schnittpunkt C' von $[A', B']$ mit $[0, z']$ und dem Schnittpunkt C von $[A, B]$ mit $[0, z]$ muss gelten $C' = F(C)$ (dieser muss insbesondere existieren, da F bijektiv). Dabei ist $C \neq 0$ (und somit $C' \neq 0$) da A, B linear unabhängig und $C \in [A, B]$.



Zeigen:

$$\frac{\|x'\|}{\|A'\|}+\frac{\|y'\|}{\|B'\|}=\|y'\|+\|x'\|\underset{\uparrow}{\geq}\frac{\|z'\|}{\|C'\|}$$

Betrachten dazu die am Punkt z' verlaufende Gerade $G:=\left\{a+b\in\mathbb{R}^2:\|a\|+\|b\|=\|x'\|+\|y'\|,\ a\parallel x',\ b\parallel y\right\}$ und die senkrecht auf ihr stehende S:



Wegen $\widehat{G,\vec{x'}}=\widehat{B'A',\vec{x'}}=45°\ \rightarrow\ \widehat{S,\vec{x}}=45°$ gilt für die dem Schnittpunkt E entsprechenden a,b

$$\|a\|=\|b\|=\frac{\|x'\|+\|y'\|}{2}$$

und ferner

$$\frac{\|z'\|}{\|C'\|}=\frac{\|E\|}{\|D\|}\overset{\|D\|=\frac{1}{\sqrt{2}}}{=}\sqrt{2}\,\|a\|\cdot\sqrt{2}=2\,\|a\|=\|x'\|+\|y'\|$$

Wegen Erhaltung von Teilerverhältnissen gilt dann

$$\frac{\|z\|}{\|C\|}=\frac{\|z'\|}{\|C'\|}=\frac{\|x'\|}{\|A'\|}+\frac{\|y'\|}{\|B'\|}=\frac{\|x\|}{\|A\|}+\frac{\|y\|}{\|B\|}=\frac{1}{\varepsilon r_x}+\frac{1}{\varepsilon r_y}$$

Wegen $A,B\in K$ und $C\in[A,B]$ muss auch $C\in K$ sein (da K konvex). Per Konstruktion sind $0,C,z$ kollinear, das heißt $\lambda z=C\in K$. Außerdem ist ersichtlich: $\lambda\not<0$ (vgl. Graphik) also $\lambda>0$ (da $C\neq0$) so dass folgt $r_z\geq\lambda$ (sogar $r_z>\lambda$ da $r_z z\notin K$). Demnach:

$$\frac{1}{r_z}<\frac{1}{\lambda}=\frac{\|z\|}{\|C\|}=\frac{1}{\varepsilon r_x}+\frac{1}{\varepsilon r_y}\quad\forall\,\varepsilon\in(0,1)$$

Lassen wir $\varepsilon\to1$ gehen, so wird ersichtlich dass gelten muss:

$$\frac{1}{r_z}\leq\frac{1}{r_x}+\frac{1}{r_y}$$

Definition der Konvexnorm

Definieren die Abbildung $p : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ gemäß:

$$p(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{r_x} & : x \neq 0 \\ \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

Dann gilt:

- $p(0) \;\Leftrightarrow\; x = 0$ (per Konstruktion)
- Für $\lambda > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, denn: Für $x = 0$ ist die Aussage trivial, und für $x \neq 0$ ist

$$p(\underbrace{\lambda x}_{\neq 0}) = \frac{1}{r_{\lambda x}} \overset{(f)}{=} \frac{\lambda}{r_x} = \lambda p(x)$$

- Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

  denn: Für $x = 0$ oder $y = 0$ ist die Aussage trivial, und für $x, y \neq 0$ ist

$$p(x+y) = \frac{1}{r_{x+y}} \overset{(g)}{\leq} \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} = p(x) + p(y)$$

Somit ist p eine Konvexnorm auf $\mathbb{R}^n$.

Nachweis der erwünschten Eigenschaft

Es ist

$$B_1^o(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) < 1\} \overset{p(0)<1}{=} \{0\} \cup \{0 \neq x \in \mathbb{R}^n : p(x) < 1\} = \{0\} \cup \left\{0 \neq x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{r_x} < 1\right\}$$

$$= \{0\} \cup \{0 \neq x \in \mathbb{R}^n : r_x > 1\} \overset{(e)}{=} \{0\} \cup \{0 \neq x \in \mathbb{R}^n : x \in K\} \overset{0 \in K}{=} K$$

Aufgabe 03

Affine Unabhängigkeit

Betrachten die Funktionen

$$\gamma_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \;,\; \gamma_n(t) := \left(t, t^2, .., t^n\right)$$

Dann gilt: Für $n+1$ paarweise verschiedene Werte $t_0, .., t_n$ sind die Punkte $\gamma_n(t_0), .., \gamma_n(t_n) \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig, das heißt die Vektoren $\overline{\gamma_n(t_0)\gamma_n(t_i)},\; i = 1, .., n$ sind linear unabhängig.
Beweis durch Induktion:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist natürlich $\overline{\gamma_1(t_0)\gamma_1(t_1)} = (t_1 - t_0) \neq 0$ linear unabhängig.
Induktionsannahme: Die Aussage gelte für $n - 1$.

Induktionsschritt: Die Vektoren $v_i := \overline{\gamma_n(t_0)\gamma_n(t_i)},\ i = 1,..,n$ sind linear unabhängig denn:

$$\det\begin{pmatrix} | & \dots & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & \dots & | \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} t_1 - t_0 & t_2 - t_1 & \dots & t_n - t_0 \\ t_1^2 - t_0^2 & t_2^2 - t_0^2 & \dots & t_n^2 - t_0^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^n - t_0^n & t_2^n - t_0^n & \dots & t_n^n - t_0^n \end{pmatrix} \overset{*}{=} \begin{pmatrix} t_1 - t_0 & t_2 - t_0 & \dots & t_n - t_0 \\ t_1(t_1 - t_0) & t_2(t_2 - t_0) & \dots & t_n(t_n - t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{n-1}(t_1 - t_0) & t_2^{n-1}(t_2 - t_0) & \dots & t_n^{n-1}(t_n - t_0) \end{pmatrix}$$

$$= (t_1 - t_0) \cdot (t_2 - t_0) \cdot .. \cdot (t_n - t_0) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \dots & t_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\overset{**}{=} \prod_{j=1}^{n} (t_j - t_0) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ t_1 & t_2 - t_1 & \dots & t_n - t_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} - t_1^{n-1} & \dots & t_n^{n-1} - t_0^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Leipniz}}{=} \prod_{j=1}^{n} \underbrace{(t_j - t_0)}_{\substack{\neq 0 \\ \text{da } t_j \neq t_0}} \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} t_2 - t_1 & \dots & t_n - t_1 \\ t_2^2 - t_1^2 & \dots & t_n^2 - t_1^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_2^{n-1} - t_1^{n-1} & \dots & t_n^{n-1} - t_0^{n-1} \end{pmatrix}}_{\substack{\neq 0 \\ \text{da Fall } n-1 \\ \text{mit } n \text{ Punkten auf } \gamma_{n-1} \\ \to \text{ Induktionsannahme}}} \neq 0$$

(*) Ziehen i-te Zeile multipliziert mit t_0 von der $i + 1$ -ten Zeile ab.
(**) Ziehen 1 Spalte von allen anderen Spalten ab.
Spezialfall: Für $n = 4,\ \gamma_4(t) = (t, t^2, t^3, t^4)$ sind 5 paarweise verschieden Punkte (entsprechend paarweise verschiedenen t_i, da γ_n injektiv) auf der Kurve affin unabhängig. $\square$

Stützebene

Betrachten den Fall $n = 4,\ \gamma_4 =: \gamma$. Es seien $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ und $Q(t) := (t - t_1)^2(t - t_2)^2$ ein Polynom in t. Anders geschrieben:

$$Q(t) = t^4 \cdot \underbrace{1}_{l_4} + t^3 \cdot \underbrace{(-2t_2 - 2t_1)}_{l_3} + t^2 \cdot \underbrace{(t_2^2 + t_1^2 + 4t_1t_2)}_{l_2} + t \cdot \underbrace{(-2t_1^2t_2 - 2t_1t_2^2)}_{l_1} + \underbrace{t_1^2t_2^2}_{-c} = \langle\gamma(t), l\rangle - c$$

das heißt $\langle\gamma(t), l\rangle = Q(t) + c$. Da $\langle\gamma(t_1), l\rangle = \langle\gamma(t_2), l\rangle = \underbrace{Q(t_{1,2})}_{0} + c = c$ ist, und für $t \neq t_{1,2}$ sogar $\langle\gamma(t), l\rangle = \underbrace{Q(t)}_{>0} + c > c$, stützt die Ebene $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, l\rangle = c\}$ die Kurve an beiden Punkten $\gamma(t_1), \gamma(t_2)$. $\square$

Das zyklische Polytop

Seien $\tau_1, .., \tau_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $x_i := \gamma(\tau_i)$. Sei nun $k \in \{1, .., m\}$ beliebig, o.B.d.A $k = 1$. Dann existiert für x_1 eine Hyperebene $\mathscr{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, l\rangle = c\} \ni x_1$, so dass für alle $t \neq \tau_1$ gilt: $\langle\gamma(t), l\rangle > c$, denn in voriger Konstruktion können wir einfach $t_1 = t_2 := \tau_1$ setzen, und erhalten diese entsprechende Hyperebene. Dann gilt für

$$x \in P := \operatorname{conv}\{x_1, .., x_m\},\ x \neq x_1$$

mit der Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\ ,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\ ,\ \lambda_i \geq 0\ ,\ (\lambda_1, .., \lambda_m) \overset{x \neq x_1}{\neq} (1, 0, .., 0)$$

die Eigenschaft:

$$\langle x,l\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i , l \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle x_i,l\rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle x_1,l\rangle}_{c} + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i \underbrace{\langle x_i,l\rangle}_{>c} \overset{\substack{\text{mindestens}\\ \text{ein } i\geq 2\\ \text{mit } \lambda_i\neq 0}}{>} c\cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}_{1} = c$$

das heißt $\langle x,l\rangle > c$. Somit ist $\mathscr{E}$ eine das Polytop am Punkt x_1 stützende Hyperebene. Wegen $\mathscr{E} \cap P = \{x_1\}$ und $\dim \operatorname{aff}\{x_1\} = 0$ ist somit x_1 eine Ecke.
Seien nun $i_1 \neq i_2 \in \{1,..,m\}$, o.B.d.A $i_1 = 1, i_2 = 2$. Dann existiert nach obiger Überlegung eine Hyperebene

$$\mathscr{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,l\rangle = c\}$$

mit $x_1, x_2 \in \mathscr{E}$ und $\langle \gamma(t), l\rangle > c$ für $t \neq \tau_1, \tau_2$ (setzen $t_1 := \tau_1, t_2 := \tau_2$). Jedoch ist wegen $x_1, x_2 \in \mathscr{E}$ diesmal auch die gesamte Strecke $[x_1 x_2] \subset \mathscr{E}$. Für alle anderen

$$x \in P := \operatorname{conv}\{x_1,..,x_m\},\ x \notin [x_1,x_2]$$

mit der Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\ ,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\ ,\ \lambda_i \geq 0\ ,\ (\lambda_1,..,\lambda_m) \overset{x\notin[x_1,x_2]}{\neq} (t, 1-t, 0,..,0),\ t \in [0,1]$$

gilt:

$$\langle x,l\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i , l \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle x_i,l\rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle x_1,l\rangle}_{c} + \lambda_2 \underbrace{\langle x_2,l\rangle}_{c} + \sum_{i=3}^{m} \lambda_i \underbrace{\langle x_i,l\rangle}_{>c} \overset{\substack{\text{mindestens}\\ \text{ein } i\geq 2\\ \text{mit } \lambda_i\neq 0}}{>} c\cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}_{1} = c$$

das heißt $\langle x,l\rangle > c$. Somit ist $\mathscr{E}$ eine das Polytop P stützende Hyperebene mit $P \cap \mathscr{E} = [x_1,x_2]$. Wegen $\dim \operatorname{aff}[x_1,x_2] = 1$ ist $[x_1,x_2]$ eine Kante von P. $\square$

Aufgabe 04

Der Fall $A = \emptyset \neq B$ ist ausgeschlossen denn sonst ist

$$\operatorname{conv}(A) + \operatorname{conv}(B) = \underbrace{\operatorname{conv}(\emptyset)}_{\emptyset} + \operatorname{conv}(B) = \operatorname{conv}(B) \neq \emptyset = \operatorname{conv}(\emptyset) = \operatorname{conv}(A+\emptyset) = \operatorname{conv}(A+B)$$

Analog ist auch der Fall $A \neq \emptyset = B$ ausgeschlossen. Andererseits ist der Fall $A = B = \emptyset$ trivial!
Sei also $A, B \neq \emptyset$. Zu zeigen sind beide Inklusionsrichtungen.

a) Bemerken:

   1) Für konvexen Mengen $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ ist auch $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ konvex.
   1) Die konvexe Hülle einer konvexen Menge ist die konvexe Menge selbst, denn sie ist halt die kleinste sich selbst enthaltende konvexe Menge.
   1) Für beliebige Mengen $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ ist auch $\operatorname{conv}(\mathscr{A}) \subset \operatorname{conv}(\mathscr{B})$.
   1) Für $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ folgt $\mathscr{A} + \mathscr{C} \subset \mathscr{B} + \mathscr{C}$.

   Somit folgt

$$\underbrace{\operatorname{conv}(A) + \operatorname{conv}(B)}_{\text{konvex wegen (a)}} \overset{(b)}{=} \operatorname{conv}(\underbrace{\underbrace{\operatorname{conv}(A)}_{\supset A} + \underbrace{\operatorname{conv}(B)}_{\supset B}}_{\substack{\supset A+B\\ \text{wegen (d)}}}) \overset{(c)}{\supset} \operatorname{conv}(A+B)$$

Variante: Es ist

$$\operatorname{conv}(A+B) = \left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i \mid \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1,\ c_i \in (A+B),\ \lambda_i \geq 0,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i (a_i + b_i) \mid \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1,\ a_i \in A,\ b_i \in B,\ \lambda_i \geq 0,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i \mid \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1,\ a_i \in A,\ b_i \in B,\ \lambda_i \geq 0,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\subset \left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{m}\mu_i b_i \mid \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{m}\mu_i = 1,\ a_i \in A,\ b_i \in B,\ \lambda_i, \mu_i \geq 0,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$= \{a+b \mid a \in \operatorname{conv}(A),\ b \in \operatorname{conv}(B)\} = \operatorname{conv}(A) + \operatorname{conv}(B)$$

b) Sei zum anderen

$$x = a + b \in \operatorname{conv}(A) + \operatorname{conv}(B),\ a \in \operatorname{conv}(A), b \in \operatorname{conv}(B)$$

das heißt

$$a = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\ ,\ b = \sum_{i=1}^{m}\mu_i b_i\ ,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{m}\mu_i = 1\ ,\ \lambda_i, \mu_i \geq 0\ ,\ a_i \in A,\ b_i \in B$$

und o.B.d.A $n = m$ (zur Not die einen oder anderen Koeffizienten mit 0 fortsetzen). Dann ist:

$$x = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{n}\mu_j b_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\mu_j}_{1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}_{1}\sum_{j=1}^{n}\mu_j b_j = \sum_{i,j=1}^{n}\mu_j\lambda_i a_i + \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\mu_j b_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}(\mu_j\lambda_i a_i + \lambda_i\mu_j b_j) = \sum_{i,j=1}^{n}\underbrace{\mu_j\lambda_i}_{\geq 0}\underbrace{(a_i + b_j)}_{\in A+B}$$

$$\text{Außerdem: } \sum_{i,j=1}^{n}\mu_j\lambda_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}_{1}\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\mu_j}_{1} = 1 \quad \rightarrow \quad x \in \operatorname{conv}(A+B)$$

also $\operatorname{conv}(A) + \operatorname{conv}(B) \subset \operatorname{conv}(A+B)$. $\square$