9. Übungsserie zur Vorlesung
„Lineare Algebra und Analytische Geometrie II“

Sommersemester 2008, Prof. V. Matveev

Aufgabe 1 (*4 Punkte*)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum sowie π ein Projektor auf U. Zeigen Sie: Die Projektion $\pi(K)$ einer konvexen offenen Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvex und relativ offen. Erläutern Sie, warum $\pi(K)$ im Allgemeinen nicht offen ist. Geben Sie ein Beispiel einer nichttrivialen abgeschlossenen Menge an, deren Projektion relativ offen ist.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*)

Ein Konvexnorm auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $p : V \to [0, \infty[$ mit

$$\begin{array}{rll} v \in V : & p(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0 & \text{(Bestimmtheit)} \\ \forall \lambda > 0, v \in V : & p(\lambda v) = \lambda\, p(v) & \text{(Homogenität)} \\ \forall v_1, v_2 \in V : & p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2) & \text{(Dreiecksungleichung)} \end{array}$$

Die Menge $\{v \in V : p(v) < 1\}$ wird als die offene Einheitskugel von p bezeichnet.

Konstruieren Sie zu einer beliebigen beschränkten offenen konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in K$ eine Konvexnorm, deren offene Einheitskugel gerade K ist.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Zeigen Sie, dass fünf paarweise verschiedene Punkte auf der Kurve

$$p(t) := (t, t^2, t^3, t^4) \qquad t \in \mathbb{R}$$

affin unabhängig im $\mathbb{R}^4$ sind und dass durch je zwei Punkte $p(t_1)$ und $p(t_2)$ eine Stützhyperebene an die Kurve verläuft.

Hinweis: Betrachten Sie das Polynom $(t - t_1)^2 (t - t_2)^2$.

Es seien nun $t_1, \ldots, t_n$ paarweise verschiedene reelle Zahlen und P die konvexe Hülle der n Punkte $p(t_i)$, das sogenannte zyklische Polytop. Folgern Sie, dass die Punkte $p(t_i)$ die Ecken von P sind und dass je zwei dieser Ecken durch eine Kante von P verbunden sind.

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)

Beweisen Sie für zwei Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{conv} A + \operatorname{conv} B = \operatorname{conv}(A + B)\,.$$

Abgabe: Montag, 23. Juni *vor* der Vorlesung. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen mit Name und Matrikelnummer.

Diese Übungsblätter sowie die Bewertungen Ihrer Lösungen finden Sie im Netz unter `http://caj.informatik.uni-jena.de`.