Lineare Algebra II

FSU Jena - SS 2008

Serie 08 - Lösungen

Stilianos Louca

15. Juni 2008

Aufgabe 01

a) Seien $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Für $A = \emptyset$ ist die Aussage trivial. Für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ A \neq \emptyset$ ist die Aussage ebenso trivial, denn

$$0A + 0A = \{0a + 0b \mid a, b \in A\} = \{0\} = \{(0+0)a \mid a \in A\} = (0+0)A$$

Nehmen also an: $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Dann gilt stets

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A = \{(\lambda_1 + \lambda_2)a \mid a \in A\} = \{\lambda_1 a + \lambda_2 a \mid a \in A\} \subset \{\lambda_1 a + \lambda_2 b \mid a, b \in A\} = \lambda_1 A + \lambda_2 A$$

Ferner gilt stets

$$(\mathbf{G}) : \lambda_1 a + \lambda_2 b = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} b\right] = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \left[a + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}(b - a)\right]$$

mit $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \in [0, 1]$.

- Ist nun A konvex, so folgt für $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$:

$$\lambda_1 A + \lambda_2 A = \{\lambda_1 a + \lambda_2 b \mid a, b \in A\} = \left\{(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \left[a + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}(b - a)\right] \mid a, b \in A\right\}$$

$$\overset{*}{\subset} \{(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha \mid \alpha \in A\} = (\lambda_1 + \lambda_2)A$$

$$(*) : A \text{ konvex } \rightarrow \ a + \underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}_{\in [0,1]}(b - a) =: \alpha \in A$$

  und somit $\lambda_1 A + \lambda_2 A = (\lambda_1 + \lambda_2)A$.

- Sei nun $\lambda_1 A + \lambda_2 A = (\lambda_1 + \lambda_2)A$ für beliebige $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, also insbesondere $\lambda_1 A + \lambda_2 A \subset (\lambda_1 + \lambda_2)A$. Seien $a, b \in A,\ t \in [0, 1]$ beliebig. Zu zeigen wäre: $a + t(b - a) \in A$. Setzen wir

$$(\lambda_1, \lambda_2) := \begin{cases} \left(1, \frac{t}{1-t}\right) & : t < 1 \\ (0, 1) & : t = 1 \end{cases}$$

so gilt

$$t = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \;\Rightarrow\; (\lambda_1+\lambda_2)\cdot[a+t(b-a)] \overset{(G)}{=} \underbrace{\lambda_1 a+\lambda_2 b}_{\in\lambda_1 A+\lambda_2 A\subset(\lambda_1+\lambda_2)A} \overset{*}{=} \underbrace{(\lambda_1+\lambda_2)}_{\neq 0}\cdot\underbrace{\alpha}_{\in A}$$

$$(*) : \lambda_1 A+\lambda_2 A = (\lambda_1+\lambda_2)A$$

$$\rightarrow\; a+t(b-a) = \alpha\in A$$

also ist A konvex.
Variante: Setzen wir $\lambda_1 := t$ und $\lambda_2 := 1-t$ so folgt nach Voraussetzung

$$tA+(1-t)A = (t+1-t)A = 1\cdot A = A$$

das heißt

$$\underbrace{ta+(1-t)b}_{\in\lambda_1 A+\lambda_2 A=A}\in A$$

Somit ist A konvex.

b) In Teil (a) wurde schon gezeigt: Ist A konvex, so ist $A+A = 1\cdot A+1\cdot A = (1+1)\cdot A = 2A$. Sei also A abgeschlossen und es gelte $A+A=2A$. Zu zeigen ist dann: A ist konvex.

Seien $a,b\in A$ beliebig. Dann ist $a+b\in A+A=2A$ also

$$\exists\;\alpha\in A : a+b = 2\alpha \;\rightarrow\; \frac{a+b}{2} = \alpha\in A$$

Für beliebige zwei Punkte $a_1,a_2\in A$ ist also auch der Mittelpunkt $\dfrac{a_1+a_2}{2}\in A$. Ist $\mathcal{R}\subset[0,1]$ die Menge der t-Werte für die gilt $a+t(b-a)\in A$ so ist gezeigt:

$$\forall\; t_1,t_2\in\mathcal{R} \;\Rightarrow\; \frac{t_1+t_2}{2}\in\mathcal{R}\;,\; 0,1\in\mathcal{R}$$

Doch solch eine Menge ist bekanntlich dicht in $[0,1]$, das heißt für jedes $t\in[0,1]$ existiert eine Folge $t_n\to t,\; t_n\in\mathcal{R}$ (vgl. Intervallhalbierungsverfahren, es kann eine beliebig *feine* Zerlegung des Intervalls $[0,1]$ vorgenommen werden). Doch da A abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert einer jeden konvergenten Folge auch wieder in A, das heißt $a+t(b-a)\in A$. Somit ist A konvex. $\square$

Aufgabe 02

a) Durch die Definition ist ersichtlich:

$$A^o = \{x\in\mathbb{R}^n : \forall\; a\in A : x\in S_1(a)\} = \left\{x\in\mathbb{R}^n : x\in\bigcap_{a\in A} S_1(a)\right\} = \bigcap_{a\in A} S_1(a) \quad,\quad S_1(a) := \{x\in\mathbb{R}^n : \langle x,a\rangle\leq 1\}$$

Doch jede Menge $S_1(a),\; a\in\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen, denn für jede Folge $(x_n)\subset S_1(a),\; x_n\to x\in\mathbb{R}^n$ gilt:

$$\langle x_n,a\rangle\leq 1 \;\Rightarrow\; 1\geq\lim_{n\to\infty}\langle x_n,a\rangle \overset{\text{Stetigkeit von }\langle,\rangle}{=} \left\langle\lim_{n\to\infty}x_n,a\right\rangle = \langle x,a\rangle \;\Rightarrow\; x\in S_1(a)$$

Bekanntlich ist jeder beliebiger Schnitt abgeschlossener Mengen, und somit auch A^o, auch wieder abgeschlossen. Ferner ist wegen der Linearität des Skalarproduktes $\langle 0,a\rangle = 0 < 1\;\forall\; a\in A$, das heißt $0\in A^o$. Sind außerdem $x,y\in A$ und $t\in[0,1]$ beliebig, so ist für beliebiges $a\in A$:

$$\langle x(1-t)+ty,a\rangle = \underbrace{(1-t)}_{\geq 0}\underbrace{\langle x,a\rangle}_{\leq 1}+t\underbrace{\langle y,a\rangle}_{\leq 1}\leq(1-t)+t = 1$$

das heißt es ist auch $(1-t)x+ty\in A^o$. Somit ist A^o konvex. $\square$

b) Aus der oberen Darstellung ist durch bekannte Eigenschaften von Mengenschnitten klar:

$$A \subset B \;\Rightarrow\; A^o = \bigcap_{a \in A} S_1(a) \overset{A \subset B}{\supset} \bigcap_{a \in B} S_1(a) = B^o$$

(da im Falle von A^o über *weniger Kugeln* geschnitten wird).

c) Aus der obigen Darstellung ist ersichtlich: Ist $x \in (A \cup B)^o$ so ist $x \in S_1(a)\ \forall\ a \in A \cup B$, also $x \in A^o\ \wedge\ a \in B^o$ und somit $x \in A^o \cap B^o$. Ist $x \in A^o \cap B^o$ so ist $x \in S_1(a)\ \forall\ a \in A$ und $x \in S_1(a)\ \forall\ a \in B$ also $x \in S_1(a)\ \forall\ a \in A \cup B$ und somit $x \in (A \cup B)^o$. Also ist $A^o \cap B^o = (A \cup B)^o$.

Ist $x \in A^o \cup B^o$ so ist $x \in S_1(a)\ \forall\ a \in A$ oder $x \in S_1(a)\ \forall\ a \in B$. Für jedes $a \in A \cap B \;\rightarrow\; a \in A\ \wedge\ a \in B$ muss dann $x \in S_1(a)$ sein, also ist $x \in S_1(a)\ \forall\ a \in A \cap B \;\rightarrow\; x \in (A \cap B)^o$. Somit gilt: $A^o \cup B^o \subset (A \cap B)^o$.

d) Für $n = 1$, $A := \{-1, 1\}$, $B := \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ und dem Skalarprodukt $\langle x, y\rangle := xy$ ist

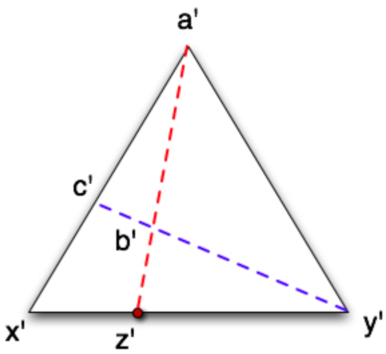
$$A^o = \{x \in \mathbb{R}^n : x \leq 1\ \wedge\ -x \leq 1\} = [-1, 1] \quad , \quad B^0 = [-2, 2]$$

$$\text{Doch: } A^o \cup B^o = [-2, 2] \neq \mathbb{R} = \emptyset^o = (A \cap B)^o$$

Aufgabe 03

Es seien $x, y \in \ker(A)$ beliebig. Nach Definition von $\ker(A)$ gilt $\forall\ a \in A : xa, ya \subset A$, und zu zeigen wäre $xy \subset \ker(A)$.

Sei also $z \in xy$ und $a \in A$ beliebig. Dann existiert mindestens eine Ebene $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}^n$ (2-dimensionaler affiner Unterraum) so dass $x, y, a \in \mathscr{E}$ sind. Da $\mathscr{E}$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist, ist insbesondere auch $xy, xa, ya \subset \mathscr{E}$. Betrachten jetzt die Affinität $F : \mathscr{E} \to \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$ die die Punkte x, y, a auf jeweils die Eckpunkte x', y', a' eines gleichseitigen Dreiecks im Unterraum $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$ abbildet. Dann bilden bekanntlich die Strecken $x'y', x'a', y'a'$ jeweils die Seiten des Dreiecks, wobei auch $z' := F(z) \subset \mathcal{G}_{x'y'}$ sogar auf der Verbindungsstrecke $x'y'$ liegt (Erhaltung der Inzidenz):



Direkt abzulesen ist: Jeder Punkt $b' \in z'a'$ wird durch eine Strecke $y'c',\ c' \in x'a'$ getroffen. Zurück in $\mathscr{E}$ bedeutet dies: Jeder Punkt $b = F^{-1}(b') \in za = F^{-1}(z'a')$ wird durch eine Strecke $yc = F^{-1}(y'c'),\ c = F^{-1}(c') \in F^{-1}(x'a') = xa$ getroffen, das heißt $b \in yc,\ c \in xa$. Doch wegen $xa \subset A$ ist auch $c \in A$ und somit $yc \subset A$. Diese bedeutet wiederum dass $b \in A$ ist, und somit $za \subset A$. Da $z \in xy$ und $a \in A$ beliebig waren, ist

$$\forall\ z \in xy : \forall\ a \in A : za \subset A \;\Rightarrow\; \forall\ z \in xy : z \in \ker(A) \;\Rightarrow\; xy \subset \ker(A)$$

Somit ist $\ker(A)$ definitionsgemäß konvex.

Beispiel 1

Betrachten den Raum $\mathbb{R}$ und die Mengen $A = \{0\},\ B = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$. Dann ist zwar $A \subset B$ doch

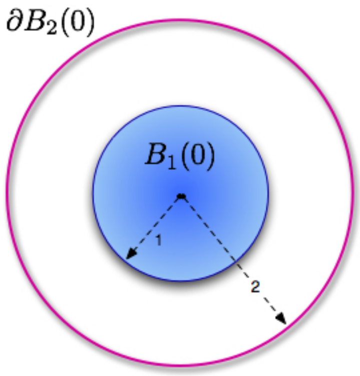
$$\ker(A) = \{0\} \not\subset \emptyset = \ker(B)$$

Beispiel 2

Betrachten den $\mathbb{R}^n$ und die Mengen $A := B_1(0), B := B_1(0) \cup \partial B_2(0)$ wobei $B_r(x)$ die abgeschlossene r-Kugel um $x \in \mathbb{R}^n$ bzgl. der Euklidischen Norm sei. Dann gilt zwar $A \subset B$ doch es ist

$$\ker(A) \overset{B_1(0) \text{ konvex}}{=} B_1(0) \not\subset \emptyset = \ker(B)$$

Anschauliche Beschreibung im $\mathbb{R}^2$: Für zwei Punkte $x \in B_1(0),\ y \in \partial B_2(0)$ liegt die Verbindungsstrecke xy nicht vollständig in $B = B_1(0) \cup \partial B_2(0)$.



Aufgabe 04

a) Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge bzgl. einer beliebigen Norm, das heißt

$$\forall\, y \in A : \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(y) \subset A$$

Sei nun $x \in \operatorname{conv}(A)$ beliebig. Dann existieren definitionsgemäß Zahlen $\lambda_1, .., \lambda_k \geq 0$ (o.B.d.A $\lambda_i > 0$) und Punkte $x_1, .., x_k \in A$ mit $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ und $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$. Da A offen ist, existieren Kugeln $B_{\varepsilon_i}(x_i) \subset A,\ \varepsilon_i > 0,\ i = 1, .., k$. Setzen

$$\varepsilon := \varepsilon_1 \cdot \lambda_1 > 0$$

so dass für beliebigen Punkt $x' \in B_\varepsilon(x)$ gilt:

$$x' = x + (x' - x) = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i x_i + \lambda_1 \underbrace{\left[x_1 + \frac{1}{\lambda_1}(x' - x) \right]}_{=: x_1'}$$

Wegen

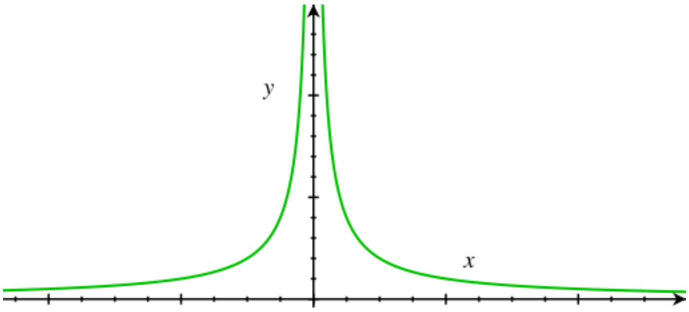
$$\|x_1 - x_1'\| = \left\| \frac{1}{\lambda_1}(x' - x) \right\| = \frac{1}{\lambda_1} \|x' - x\| \overset{x' \in B_\varepsilon(x)}{\leq} \frac{\varepsilon}{\lambda_1} = \varepsilon_1$$

ist $x_1' \in B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset A$ das heißt x' ist eine konvexe Kombination der $x_1', .., x_k \in A$ und somit auch in $\operatorname{conv}(A)$. Somit ist $B_\varepsilon(x) \subset \operatorname{conv}(A)$, das heißt $\operatorname{conv}(A)$ ist offen.

b) Die konvexe Hülle einer abgeschlossenen Menge A ist im allgemeinen nicht abgeschlossen.
Gegenbeispiel 1: Betrachten den $\mathbb{R}^2$ und die Abbildung

$$\gamma : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\ ,\ \gamma(x) := \frac{1}{|x|}$$

illustriert in folgender Graphik:



Die beiden Zweige $A_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \gamma(x), x < 0\}$ und $A_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \gamma(x), x > 0\}$ können wie zu erkennen ist jeweils stetig auf den gesamten $\mathbb{R}$ abgebildet werden. Da $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist, sind auch die Urbilder A_1, A_2 abgeschlossen, und somit auch deren (endliche) Vereinigung $A = A_1 \cup A_2$.

Die konvexe Hülle von A ergibt sich als der <u>positive</u> Halbraum $\mathbb{R} \times (0,\infty)$, denn: Offensichtlich ist $\mathbb{R} \times (0,\infty) \subset \operatorname{conv}(A)$, und damit ein Punkt $(x,y) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0]$ ist, muss es mindestens einen Punkt $(x', y') \in A$ geben mit $y' \leq 0$. Doch dies ist nicht der Fall. Da aber

$$\partial \operatorname{conv}(A) = \mathbb{R} \times \{0\} \not\subset A$$

ist, ist $\operatorname{conv}(A)$ <u>nicht</u> abgeschlossen.

Gegenbeispiel 2: Betrachten die aus einer Geraden G und einem Punkt $P \notin G$ bestehende Menge $A = G \cup \{P\}$. Diese ist natürlich abgeschlossen. Doch deren konvexe Hülle $\operatorname{conv}(A)$ ist wie unten illustriert (bläulicher Bereich) nicht abgeschlossen, da ihr Rand $\partial \operatorname{conv}(A) = R \cup G$ nicht komplett in $\operatorname{conv}(A)$ liegt.