8. Übungsserie zur Vorlesung „Lineare Algebra und Analytische Geometrie II“

Sommersemester 2008, Prof. V. Matveev

Aufgabe 1 *(2+2 Punkte)*

Für $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$A + B := \{a + b \in \mathbb{R}^n : a \in A, b \in B\} \qquad \text{sowie} \qquad \lambda A := \{\lambda a \in \mathbb{R}^n : a \in A\}\,.$$

Zeigen Sie:

(a) A ist genau dann konvex, wenn $\lambda_1 A + \lambda_2 A = (\lambda_1 + \lambda_2)A$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$.

(b) Ist A abgeschlossen, so ist A genau dann konvex, wenn $A + A = 2A$.

Aufgabe 2 *(1+1+1+1 Punkte)*

Die Polare einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei definiert als

$$A^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall a \in A : \langle x, a\rangle \leq 1\}\,.$$

Zeigen Sie:

(a) A° ist abgeschlossen, konvex und $0 \in A^\circ$.

(b) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A^\circ \supseteq B^\circ$.

(c) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ und $(A \cap B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$.

(d) Es gibt Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $(A \cap B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*

Wir bezeichnen die Strecke zwischen zwei Punkten $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit ab. Beweisen Sie, dass der Kern

$$\ker A := \{x \in A : \forall a \in A : xa \subseteq A\}$$

einer Menge A konvex ist und finden Sie ein Beispiel dafür, dass $A \subseteq B$ nicht $\ker A \subseteq \ker B$ impliziert.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*

Entscheiden Sie, ob die konvexe Hülle einer offenen (abgeschlossenen) Menge im $\mathbb{R}^n$ wieder offen (abgeschlossen) ist und begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe: Montag, 9. Juni *vor* der Vorlesung. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen mit Name und Matrikelnummer.

Diese Übungsblätter sowie die Bewertungen Ihrer Lösungen finden Sie im Netz unter `http://caj.informatik.uni-jena.de`.