Lineare Algebra II

FSU Jena - SS 2008

Serie 07 - Lösungen

Stilianos Louca

15. Juni 2008

Aufgabe 01

a) Es sei $a_1 \in \mathscr{A}_1,\ a_2 \in \mathscr{A}_2$ und e_1 ein Basisvektor für V, das heißt $V = \text{span}\{e_1\}$. Dann lässt sich jedes Element $a \in \mathscr{A}_1$ darstellen als $a = a_1 + \lambda e_1$, denn e_1 ist Basis für V und somit ist $\overline{a_1 a} = \lambda e_1$ für irgendein $\lambda \in \mathbb{R}$. Definieren somit:

$$F(a_1 + \lambda e_1) := a_2 + \lambda^3 e_1$$

Diese Abbildung ist bijektiv denn:

- Für $F(\underbrace{a_1 + \lambda_1 e_1}_{v_1}) = F(\underbrace{a_1 + \lambda_2 e_1}_{v_2}) \ \rightarrow\ \lambda_1^3 e_1 = \lambda_2^3 e_1$ muss wegen der Eindeutigkeit der Darstellung $\lambda_1^3 = \lambda_3^2$ sein, also $\lambda_1 = \lambda_2 \ \rightarrow\ v_1 = v_2$. Somit ist F injektiv.
- Für $a \in \mathscr{A}_2$ gibt es (analog zu vorhin) ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $a = a_2 + \mu e_1$. Setzen wir $\lambda := \sqrt[3]{\mu}$ so ist

$$F(\underbrace{a_1 + \lambda e_1}_{\in \mathscr{A}_1}) = a_2 + \lambda^3 e_1 = a_2 + \mu e_1 = a$$

  Somit ist F surjektiv.

Außerdem erhält F Geraden, denn: Die affinen Räume $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ sind beides Geraden (da 1-dim affine Unterräume) und für jede $a = a_1 + \lambda e_1, b = a_1 + \mu e_1 \in \mathscr{A}_1,\ a \neq b$ ist

$$\mathscr{A}_1 \supset \mathcal{G}_{ab} = \left\{a + t \cdot \overline{ab} \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \{a_1 + \lambda e_1 + t \cdot (\mu - \lambda) e_1 \mid t \in \mathbb{R}\} = \{a_1 + (\lambda + t(\mu - \lambda))\, e_1 \mid t \in \mathbb{R}\} \overset{*}{\supset} \mathscr{A}_1$$

denn für jedes $\rho \in \mathbb{R}$ gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\lambda + t(\mu - \lambda) = \rho$ da $\mu \neq \lambda$. Somit ist für $a \neq b \in \mathscr{A}_1 : \mathcal{G}_{ab} = \mathscr{A}_1$, das heißt jede Gerade G in $\mathscr{A}_1$ wird auf ganz $\mathscr{A}_2$ abgebildet (da surjektiv und $G = \mathscr{A}_1$). Doch $\mathscr{A}_2$ ist auch wieder eine Gerade.

Jedoch ist F keineswegs eine Affinität, denn sonst müsse es einen bijektiven Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ geben mit

$$F(a_1 + \lambda e_1) = \underbrace{F(a_1)}_{a_2} + f(\lambda e_1) = a_2 + \lambda f(e_1) \overset{!}{=} a_2 + \lambda^3 e_1 \ \rightarrow\ f(e_1) = \lambda^2 e_1\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

also $f(e_1) = 0$. Doch dann wäre f nicht injektiv und insbesondere nicht bijektiv.

Konkretes Beispiel:

Für $V = \mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 = \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$F(\lambda) := \lambda^3$$

zwar bijektiv und erhält auch Geraden (da die einzige Gerade $\mathbb{R}$ ist und $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$), doch ist offensichtlich keine Affinität, denn sonst müsste es einen bijektiven Endomorphismus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ geben mit

$$F(\lambda) = F(0 + \lambda) = F(0) + f(\lambda) = 0 + f(\lambda) \overset{!}{\lambda^3}$$

was ein Widerspruch ist, da $f(\lambda) = \lambda \ \forall\ \lambda$ nicht linear ist.

b) Es sei $V = \mathbb{C}^2$ und $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 = V$. Sei e_1, e_2 die Standardbasis in $\mathbb{C}^2$. Definieren die Abbildung

$$F : V \to V \ , \ F(\lambda e_1 + \mu e_2) := \overline{\lambda} e_1 + \overline{\mu} e_2 \ , \ \overline{z} : \text{Komplexe Konjugierung von } z$$

Dann ist diese Abbildung surjektiv, denn zu jedem $a = \lambda e_1 + \mu e_2 \in \mathscr{A}_2$ ist

$$F(\underbrace{\overline{\lambda} e_1 + \overline{\mu} e_2}_{\in \mathscr{A}_1}) = \overline{\overline{\lambda}} e_1 + \overline{\overline{\mu}} e_2 = \lambda e_1 + \mu e_2 = a$$

und Injektiv, denn aus $F(\lambda_1 e_1 + \mu_1 e_2) = F(\lambda_2 e_1 + \mu_2 e_2)$ folgt

$$\left(\overline{\lambda}_1 - \overline{\lambda}_2\right) e_1 + \left(\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2\right) e_2 = 0 \overset{e_1, e_1 \text{ linear unabhängig}}{\longrightarrow} \overline{\lambda}_1 = \overline{\lambda}_2 \ \wedge \ \overline{\mu}_1 = \overline{\mu}_2 \ \to \ \lambda_1 = \lambda_2 \ \wedge \ \mu_1 = \mu_2$$

Somit ist F bijektiv. Ferner erhält F Geraden, denn für

$$\mathcal{G} := a_0 + \operatorname{span}\{v\} \quad , \quad a_0 = (\lambda_0 e_1 + \mu_0 e_2) \in \mathcal{A}_1 \quad , \quad v = (\lambda_1 e_1 + \mu_1 e_2) \in V$$

gilt:

- Für $a = a_0 + tv \in \mathcal{G}$ ist

$$F(a) = F\left(\lambda_0 e_1 + \mu_0 e_2 + t \cdot (\lambda_1 e_1 + \mu_1 e_2)\right) = F\left((\lambda_0 + t\lambda_1) e_1 + (\mu_0 + t\mu_1) e_1\right)$$

$$= \left(\overline{\lambda_0} + \overline{t} \cdot \overline{\lambda_1}\right) \cdot e_1 + \left(\overline{\mu}_0 + \overline{t} \cdot \overline{\mu_1}\right) \cdot e_2 = \underbrace{\overline{\lambda_0} e_1 + \overline{\mu_0} e_2}_{=: a_0'} + \overline{t} \cdot \underbrace{\left(\overline{\lambda_1} e_1 + \overline{\mu_1} e_2\right)}_{=: v'} = a_0' + \overline{t} \cdot v' \in a_0' + \operatorname{span}\{v_0'\} =: \mathcal{G}'$$

  das heißt $F(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}'$.
- Für beliebigen Punkt

$$a' = a_0' + t \cdot v' \in \mathcal{G}' \ , \ t \in \mathbb{C}$$

  ist dann offensichtlich $F(a_0 + \overline{t} \cdot v) = a_0' + \overline{\overline{t}} \cdot v' = a'$, das heißt $\mathcal{G} \subset F(\mathcal{G})$.
- Somit gibt es für jede Gerade $\mathcal{G} \subset \mathscr{A}_1$ eine Gerade $\mathcal{G}' \subset \mathscr{A}_2$ so dass $F(\mathcal{G}) = \mathcal{G}'$ ist, das heißt F erhält Geraden.

Doch F ist keine affine Abbildung, denn sonst gäbe es einen Endomorphismus $f : V \to V$ mit

$$F(v) = F(\underbrace{0}_{\in \mathscr{A}_1} + v) = \underbrace{F(0)}_{F(0e_1 + 0e_2) = 0} + f(v) = f(v)$$

das heißt insbesondere dass F linear wäre. Doch z.B. ist

$$F(i \cdot e_1) = \overline{i} \cdot e_1 = -i \cdot e_1 \neq i \cdot e_1 = i \cdot F(e_1)$$

das heißt F ist gar nicht ($\mathbb{C}$-) linear. Somit ist F auch keine Affinität. $\square$

Aufgabe 02

Hilfsaussage 1

Für zwei affine Unterräume $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2$ mit den entsprechenden Unterräumen U_1, U_2 über dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V gilt: $U_1 \subset U_2$ und somit auch $\dim \mathscr{A}_1 \leq \dim \mathscr{A}_2$.
Beweis: Da $\mathscr{A}_1 \neq \emptyset$ ist, gibt es ein $a_0 \in \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2$ mit:

$$\mathscr{A}_1 = a_0 + U_1 := \{a_0 + v \mid v \in U_1\} \ , \ \mathscr{A}_2 = a_0 + U_2$$

Somit muss insbesondere für jedes $v \in U_1$ gelten: $a_0 + v \in \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2 \ \to \ a_0 + v = a_0 + w, \ w \in U_2$. Wegen der Eindeutigkeit von v muss $v = w$ sein, das heißt $v \in U_2$. Somit ist $U_1 \subset U_2$. $\square$

a) Sei $\mathscr{M}$ eine Menge von affinen Unterräumen eines affinen Raumes $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B} = \bigcap_{A \in \mathcal{M}} A$. Ist $\mathscr{B} = \emptyset$ so ist $\mathscr{B}$ kein affiner Unterraum (da $\nexists\ a_0 \in \mathscr{B}$, vgl. Definition). Betrachten also nur den Fall $\mathscr{B} \neq \emptyset$. Sei $a_0 \in \mathscr{B}$ und für jedes $A \in \mathcal{M}$ sei U_A der entsprechende Unterraum und $U := \bigcap_{A \in \mathcal{M}} U_A$. U ist bekanntlich auch ein Unterraum und nach Lemma 6 (vgl. Vorlesung) gilt:

$$A = \{a_0 + v \mid v \in U_A\}$$

Ist also ein $a = a_0 + v \in \mathscr{B}$ so muss $v \in U_A\ \forall\ A \in \mathcal{M}$ also $v \in U$ sein. Ist umgekehrt $v \in U$, das heißt $v \in U_A\ \forall\ A \in \mathcal{M}$, so ist $a = a_0 + v \in A\ \forall\ A \in \mathcal{M}$ also $a \in \mathscr{B}$. Somit ist

$$\mathscr{B} = \{a_0 + v \mid v \in U\}$$

und nach Definition ein affiner Unterraum. $\square$

b) Es sei $\mathbb{R}^4$ der affine Raum selbst, $e_1, .., e_4$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^4$. Nach Teil (a) ist $\operatorname{aff}(M)$ selbst ein affiner Unterraum, sei dazu U der entsprechende Unterraum von $\mathbb{R}^4$:

$$\operatorname{aff}(M) = \{a_0 + v \mid v \in U\} \text{ für beliebiges } a_0 \in \operatorname{aff}(M)$$

Da die Punkte e_1, e_2, e_3, e_4 alle in $\operatorname{aff}(M)$ liegen, müssen die Vektoren $v_1 := (e_2 - e_1), v_2 := (e_3 - e_1), v_3 := (e_4 - e_3)$ alle in U liegen. Doch diese sind linear unabhängig, so dass $\dim U \geq 3$ sein muss. Die Geraden durch die beiden Punktpaare sind jeweils gegeben durch

$$\mathcal{G}_{e_1 e_2} = \{e_1 + t \cdot v_1 \mid t \in \mathbb{R}\} = e_1 + \operatorname{span}\{v_1\}\ ,\ \mathcal{G}_{e_3,e_4} = \{e_3 + t \cdot v_3 \mid t \in \mathbb{R}\} = e_3 + \operatorname{span}\{v_3\}$$

Dann enthält der affine Unterraum $\mathscr{A}$ definiert durch

$$\mathscr{A} = \{e_1 + t \cdot v \mid v \in \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}\} = e_1 + \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$$

diese beiden Geraden, denn: Für $p \in \mathcal{G}_{e_1 e_2}$ ist p darstellbar als $p = e_1 + \lambda v_1,\ \lambda \in \mathbb{R}$ also

$$p \in e_1 + \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} \ \rightarrow\ p \in \mathscr{A}$$

Für $q \in \mathcal{G}_{e_3,e_4}$ ist q darstellbar als $q = e_3 + \lambda v_3$ also

$$q = e_1 + (e_3 - e_1) + \lambda v_3 = e_1 + v_2 + \lambda v_3 \in e_1 + \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} \ \rightarrow\ q \in \mathscr{A}$$

Somit muss $\operatorname{aff}(M) \subset \mathscr{A}$ und sein (da Schnitt über $\mathscr{A}$). Wegen Hilfsaussage 1 muss also gelten $U \subset \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ also ist $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. Somit ist

$$\operatorname{aff}(M) = e_1 + \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$$

Aufgabe 03

Hilfsaussage 2

Für Unterräume $U_1, U_2 \subset V$, affinen Raum $\mathscr{A}$ und $a_0 \in \mathscr{A}$, ist

$$\mathscr{A}_v := \operatorname{aff}\left[(a_0 + U_1) \cup (a_0 + U_2)\right] = a_0 + (U_1 + U_2)$$

Beweis: Sei $a \in a_0 + U_1$, das heißt $a = a_0 + v,\ v \in U_1$. Dann ist insbesondere $v \in U_1 + U_2$ also $a = a_0 + v \in a_0 + (U_1 + U_2)$. Somit ist $a_0 + U_1 \subset a_0 + (U_1 + U_2)$. Analog ist auch $a_0 + U_2 \subset a_0 + (U_1 + U_2)$. Somit ist

$$(a_0 + U_1) \cup (a_0 + U_2) \subset a_0 + (U_1 + U_2)$$

Da $a_0 + (U_1 + U_2)$ auch ein affiner Unterraum ist, muss

$$\mathscr{A}_v \subset a_0 + (U_1 + U_2)$$

sein (da Schnitt). Nach Hilfsaussage 1 gilt dann: $U_v \subset (U_1 + U_2)$
Sei nun U_v der zu $\mathscr{A}_v$ entsprechende Unterraum. Wegen $a_0 + U_1 \subset \mathscr{A}_v$ gilt nach Hilfsaussage 1: $U_1 \subset U_v$. Analog gilt auch $U_2 \subset U_v$. Da U_v abgeschlossen ist, gilt: $U_1 + U_2 \subset U_v$. Somit ist schließlich $U_v = U_1 + U_2$ und somit $\mathscr{A}_v = a_0 + (U_1 + U_2)$. $\square$

a) Betrachten die beiden endlich-dimensionalen Unterräume $V_1, V_2 \subset V$, mit jeweils der Dimension k und r. Bekanntlich sind $V_1 \cap V_2$ und $V_1 + V_2$ auch wieder Unterräume und es ist $V_1 \cap V_2 \subset V_1 \subset V_1 + V_2$.

Sei also $b_1, ..., b_m$ eine Basis für $V_1 \cap V_2 \subset V_1$. Nach dem Basisergänzungssatz lässt sich diese zu einer Basis $b_1, .., b_m, c_{m+1}, ..., c_k$ von V_1 und analog zu einer Basis $b_1, .., b_m, d_{m+1}, ..., d_r$ von V_2 fortsetzen:

$$m = \dim(V_1 \cap V_2)\ ,\ k = \dim(V_1)\ ,\ r = \dim(V_2)$$

Wir wollen zeigen: $\mathcal{B} := \{b_1, .., b_m, c_{m+1}, .., c_k, d_{m+1}, .., d_r\}$ bilden Basis für $V_1 + V_2$.

- **Erzeugendensystem:** Sei $v \in V_1 + V_2 = \operatorname{span}\{b_1, .., c_k\} + \operatorname{span}\{b_1, .., d_r\}$. Dann ist bekanntlich

$$v \in \operatorname{span} \mathcal{B}$$

denn für jede Darstellung gilt:

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i + \sum_{i=m+1}^{k} \lambda_i c_i}_{\in V_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i + \sum_{i=m+1}^{r} \lambda_i d_i}_{\in V_2}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(\lambda_i + \mu_i)}_{=:\rho_i'} b_i + \sum_{i=m+1}^{k} \lambda_i c_i + \sum_{i=m+1}^{r} \lambda_i d_i \in \operatorname{span}\{b_1, ..., b_m, c_{m+1}, ..., c_k, d_{m+1}, .., d_r\}$$

Also ist $(V_1 + V_2) \subset \operatorname{span} \mathcal{B}$ das heißt $\mathcal{B}$ ist Erzeugendensystem für $V_1 + V_2$.

- **Linear unabhängig:** Seien

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i}_{=:v_0 \in V_1 \cap V_2} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{k} \mu_i c_i}_{=:v_1 \in V_1} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{r} \rho_i d_i}_{=:v_2 \in V_2} = 0$$

Ist $v_2 \neq 0$, so ist

$$V_2 \ni v_2 = -\underbrace{v_0}_{\in V_1} - \underbrace{v_1}_{\in V_1} \in V_1$$

also $v_2 \in V_1 \cap V_2$. Doch da die $b_1, .., b_m, d_{m+1}, .., d_r$ linear unabhängig sind, sind auch die $b_1, .., b_m, v_2 \in V_1 \cap V_2$ linear unabhängig (da $v_2 \in \operatorname{span}\{d_{m+1}, .., d_r\}$). Doch dies ist ein Widerspruch zur Basis $b_1, .., b_m$ von $V_1 \cap V_2$.

Somit ist $v_2 = 0$, weshalb die $\rho_i = 0$ (da $d_{m+1}, .., d_k$ linear unabhängig) und die $v_0 + v_1 = 0$ sein müssen. Doch da die $b_1, .., b_m, c_{m+1}, .., c_k$ linear unabhängig sind, müssen die λ_i und μ_i ebenfalls verschwinden.
Somit sind die $\{b_1, .., b_m, c_{m+1}, .., c_k, d_{m+1}, .., d_r\}$ linear unabhängig.

Hieraus folgt:

$$\dim V_1 + \dim V_2 = k + r = k + r - m + m = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \quad \square$$

b) Seien U_1, U_2 die zu $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ entsprechenden Unterräume. Da $\mathscr{A}_s := \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 \neq \emptyset$ ist, gibt es ein $a_0 \in \mathscr{A}_s$, so dass

$$\mathscr{A}_1 = a_0 + U_1\ ,\ \mathscr{A}_2 = a_0 + U_2$$

gilt. Dann ist der Unterraum von $\mathscr{A}_s$ nach Aufgabe (02) gegeben durch

$$U_s := U_1 \cap U_2$$

Für $\mathscr{A}_v := \operatorname{aff}(\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2)$ ist der entsprechende Unterraum U_v nach Hilfsaussage 2 gegeben durch

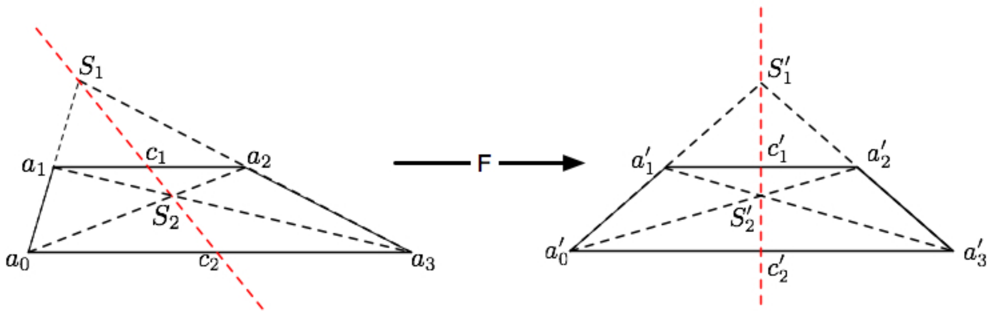
$$U_v = U_1 + U_2$$

Somit ergibt sich nach Teil (a)

$$\dim \mathscr{A}_1 + \dim \mathscr{A}_2 = \dim U_1 + \dim U_2 = \dim(\underbrace{U_1 \cap U_2}_{U_s}) + \dim(\underbrace{U_1 + U_2}_{U_v}) = \dim(\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2) + \dim \operatorname{aff}(\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2) \quad \square$$

Aufgabe 04

Betrachten ein Trapez bestehend aus den Eckpunkten $a_0, .., a_4 \in \mathbb{R}^2,\ a_0 \neq a_3,\ a_1 \neq a_2$, wobei die Geraden $\mathcal{G}_{a_0 a_3},\ \mathcal{G}_{a_1 a_2}$ parallel und die Geraden $\mathcal{G}_{a_0 a1},\ \mathcal{G}_{a_3 a_2}$ nicht parallel seien. Dabei ist $\mathbb{R}^2$ der betrachtet affine Raum selbst. Dann existiert bekanntlich eine Affinität $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die das Dreieck $a_0 S_1 a_3$ in ein gleichschenkliges Dreieck $a_0' S_1' a_3'$ überführt, das heißt $F(a_0) = a_0', F(a_3) = a_3', F(S_1) = S_1'$



Nennen $a_1' := F(a_1)$ und $a_2' := F(a_2)$. Da Affinitäten Geraden und sogar deren Parallelität erhalten, ist auch $\mathcal{G}_{a_1' a_2'} \parallel \mathcal{G}_{a_0' a_3'}$. Nennen wir $c_1' := F(c_1)$ und $c_2' := F(c_2)$ so sind diese c_1', c_2' ach jeweils Mittelpunkte der beiden Geraden $\mathcal{G}_{a_1' a_2'},\ \mathcal{G}_{a_0' a_3'}$, da Teilverhältnis eine affine Eigenschaft ist.

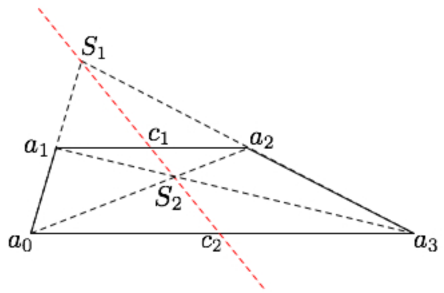
Aus Symmetriegründen ist zu erkennen: Der Schnittpunkt S_2' der beiden Diagonalen von $a_0' a_1' a_2' a_3'$, die beiden Punkte c_1', c_2' und der Schnittpunkt S_1' der Geraden $\mathcal{G}_{a_0' a_1'}$ und $\mathcal{G}_{a_3' a_2'}$ liegen alle auf der Geraden $\mathcal{G}_{c_2' c_1'}$.

Da F bijektiv ist, ist $S_2' = F(S_2)$ und da F geradentreu ist (das heißt insbesondere $F\left(\mathcal{G}_{c_1 c_2}\right) = \mathcal{G}_{c_1' c_2'}$), muss S_2 auch auf $\mathcal{G}_{c_1 c_2}$ liegen. Analog muss auch S_1 auf $\mathcal{G}_{c_1 c_2}$ liegen.

Variante:

Betrachten ein Trapez bestehend aus den Eckpunkten $a_0, .., a_4 \in \mathbb{R}^2,\ a_0 \neq a_3,\ a_1 \neq a_2$, wobei die Geraden $\mathcal{G}_{a_0 a_3},\ \mathcal{G}_{a_1 a_2}$ parallel und die Geraden $\mathcal{G}_{a_0 a1},\ \mathcal{G}_{a_3 a_2}$ nicht parallel seien. Dabei ist $\mathbb{R}^2$ der betrachtet affine Raum selbst, und es sei

$$v_1 := \overline{a_0 a_1} = a_1 - a_0\ ,\ \ v_2 := \overline{a_0 a_2} = a_2 - a_0$$



Dann haben die Geraden $\mathcal{G}_{a_0 a1},\ \mathcal{G}_{a_3 a_2}$ genau einen Schnittpunkt S_1 (vgl. Vorlesung). Analog haben auch die Diagonalen $\mathcal{G}_{a_1 a_3},\ \mathcal{G}_{a_0 a_2}$ genau einen Schnittpunkt. Sind $c_1 = \dfrac{a_2 + a_1}{2}$ und $c_2 = \dfrac{a_3 + a_0}{2}$ die Mittelpunkte der beiden parallelen Trapezseiten, so ist zu zeigen: S_1, S_2 liegen beide auf der Geraden $\mathcal{G}_{c_1 c_2}$.

- Da die $\mathcal{G}_{a_0 a_3},\ \mathcal{G}_{a_1 a_2}$ parallel sind, sind deren entsprechenden Unterräume $\operatorname{span}\{a_3 - a_0\}, \operatorname{span}\{a_2 - a_1\}$ gleich, das heißt $a_3 - a_0 = \lambda(a_2 - a_1),\ \lambda \in \mathbb{R}$. Ferner ist $\lambda \neq \pm 1$, da sonst

$$\lambda = 1 : a_2 - a_1 = (a_3 - a_0 \ \to\ a_2 - a_3 = a_1 - a_0 \ \to\ \underbrace{\operatorname{span}\{a_2 - a_3\}}_{\substack{\text{Unterraum}\\ \text{von } \mathcal{G}_{a_3 a_2}}} = \underbrace{\operatorname{span}\{a_1 - a_0\}}_{\substack{\text{Unterraum}\\ \text{von } \mathcal{G}_{a_0 a_1}}}$$

$$\lambda = -1 : a_2 - a_1 = a_0 - a_3 \ \to\ a_2 - a_0 = a_1 - a_3 \ \to\ \underbrace{\operatorname{span}\{a_2 - a_0\}}_{\substack{\text{Unterraum}\\ \text{von } \mathcal{G}_{a_0 a_2}}} = \underbrace{\operatorname{span}\{a_1 - a_3\}}_{\substack{\text{Unterraum}\\ \text{von } \mathcal{G}_{a_3 a_1}}}$$

  und somit $\mathcal{G}_{a_0 a_1} \parallel \mathcal{G}_{a_3 a_2}$ oder $\mathcal{G}_{a_1 a_3} \parallel \mathcal{G}_{a_0 a_2}$ sein würde was ein Widerspruch ist.

- Der Schnittpunkt S_1 ist charakterisiert durch

$$(*): S_1 = a_0 + t(a_1 - a_0) = a_3 + r(a_2 - a_3)\ ,\ t, r \in \mathbb{R}$$

wobei nach dem Strahlensatz gilt:

$$TV(S_1, a_1, a_0) = TV(S_1, a_2, a_3)\ \rightarrow\ t = r$$

Zusammen mit $a_3 = a_0 + \lambda(a_2 - a_1)$ ergibt sich in (*) eingesetzt:

$$(a_2 - a_1)(\lambda + r - r\lambda) = 0 \ \overset{a_2 \neq a_1}{\longrightarrow}\ \lambda + r - r\lambda = 0 \ \overset{\lambda \neq 1}{\longrightarrow}\ r = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

Somit ist S_1 gegeben durch

$$S_1 = a_0 + \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \underbrace{(a_1 - a_0)}_{v_1}$$

- Die Diagonalen sind gegeben durch

$$\mathcal{G}_{a_0 a_2} = a_0 + \operatorname{span}\{a_2 - a_0\}\ ,\ \mathcal{G}_{a_3 a_1} = a_3 + \operatorname{span}\{a_1 - a_3\}$$

so dass S_2 charakterisiert ist durch

$$S_2 = a_0 + t\,(a_2 - a_0) = a_3 + r\,(a_1 - a_3)\ ,\ t, r \in \mathbb{R}$$

Analog ergibt sich auch hier durch den Strahlensatz

$$TV(S_2 a_0 a_2) = TV(S_2 a_3 a_1)\ \rightarrow\ t = r$$

Zusammen mit $a_3 = a_0 + \lambda(a_2 - a_1)$ ergibt sich in (*) eingesetzt:

$$(a_2 - a_1)(\lambda - r - r\lambda) = 0 \ \overset{a_2 \neq a_1}{\longrightarrow}\ \lambda - r - r\lambda = 0 \ \overset{\lambda \neq -1}{\longrightarrow}\ r = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

Somit ergibt sich S_2 als

$$S_2 = a_0 + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \underbrace{(a_2 - a_0)}_{v_2}$$

- Die Mittelpunkte c_1, c_2 sind gegeben durch

$$c_1 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = \frac{1}{2}(a_2 - a_0 + a_0 + a_1) = a_0 + \frac{1}{2}(a_1 - a_0) + \frac{1}{2}(a_2 - a_0)$$

$$c_2 = a_0 + \frac{1}{2}(a_3 - a_0) = a_0 + \frac{\lambda}{2}(a_2 - a_1)$$

so dass sich die (eindeutige), diese verbindende, Gerade ergibt als:

$$\mathcal{G}_{c_1 c_2} = c_1 + \operatorname{span}\{c_1 - c_2\} = \frac{a_1 + a_0}{2} + \operatorname{span}\left\{\frac{a_1 + a_2}{2} - a_0 - \frac{\lambda}{2}(a_2 - a_1)\right\}$$

$$= a_0 + \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2} + \operatorname{span}\{v_1 + v_2 - \lambda(v_2 - v_1)\}$$

- Zu zeigen wäre jetzt: $S_1, S_2 \in \mathcal{G}_{c_1 c_2}$. Es gilt jedoch:

$$S_1 = a_0 + \frac{\lambda}{\lambda - 1} v_1 = a_0 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1 + \lambda}{2(\lambda - 1)}\right] \cdot v_1 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1 - \lambda}{2(\lambda - 1)}\right] \cdot v_2$$

$$= a_0 + \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2} + \frac{1}{2(\lambda - 1)} \cdot (v_1 + v_2 - \lambda(v_2 - v_1)) \in \mathcal{G}_{c_1 c_2}$$

$$S_2 = a_0 + \frac{\lambda}{1 + \lambda} v_2 = a_0 + \left[\frac{1}{2} - \frac{1 + \lambda}{2(1 + \lambda)}\right] \cdot v_1 + \left[\frac{1}{2} - \frac{1 - \lambda}{2(1 + \lambda)}\right] \cdot v_2$$

$$= a_0 + \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2} - \frac{1}{2(1 + \lambda)} \cdot (v_1 + v_2 - \lambda(v_2 - v_1)) \in \mathcal{G}_{c_1 c_2} \quad \square$$