7. Übungsserie zur Vorlesung „Lineare Algebra und Analytische Geometrie II“

Sommersemester 2008, Prof. V. Matveev

Aufgabe 1 *(2+2 Punkte)*

Es seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ zwei affine Räume über einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Finden Sie in den folgenden beiden Fällen eine geradentreue bijektive Abbildung $F : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$, die keine Affinität ist und beweisen Sie dies:

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \;\dim V = 1$

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \;\dim V \geq 2$

Aufgabe 2 *(2+2 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass der Schnitt beliebig vieler affiner Unterräume eines affinen Raumes selbst wieder ein affiner Unterraum ist.

Sei M eine Teilmenge eines affinen Raumes. Dann nennt man den Schnitt aller affinen Unterräume, welche M enthalten, die affine Hülle $\operatorname{aff}(M)$ von M.

(b) Berechnen Sie die affine Hülle der beiden windschiefen Geraden durch die Punkte $(1, 0, 0, 0)$ und $(0, 1, 0, 0)$ bzw. $(0, 0, 1, 0)$ und $(0, 0, 0, 1)$ im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 3 *(3+1 Punkte)*

(a) Beweisen Sie die Dimensionsformel

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2)$$

für zwei Untervektorräume V_1 und V_2 eines Vektorraumes.

(b) Schliessen Sie aus (a) die Dimensionsformel

$$\dim \mathcal{A}_1 + \dim \mathcal{A}_2 = \dim(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) + \dim \operatorname{aff}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$$

für zwei affine Unterräume $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ eines affinen Raumes mit $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \varnothing$.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*

Wir betrachten ein Trapez, welches kein Parallelogramm ist. Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der beiden parallelen Seiten, der Schnittpunkt der beiden anderen Seiten sowie der Schnittpunkt der beiden Diagonalen alle auf einer Geraden liegen.

Abgabe: Montag, 2. Juni *vor* der Vorlesung. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen mit Name und Matrikelnummer.

Diese Übungsblätter sowie die Bewertungen Ihrer Lösungen finden Sie im Netz unter http://caj.informatik.uni-jena.de.